

MATEMATICA

ARITMETICA

TEORIA DEGLI INSIEMI

Insieme = gruppo di elementi di cui si può stabilire inequivocabilmente almeno una caratteristica in comune.

Esempi: *le vocali dell'alfabeto italiano* costituiscono un insieme;
i libri più interessanti della biblioteca non costituiscono un insieme, perché non lo si può stabilire con certezza

un **insieme** si indica con la **lettera maiuscola**
gli **elementi dell'insieme** con la **lettera minuscola**

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$

Simboli relativi agli insiemi

- ▶ **$A = B$ (uguaglianza)**: gli insiemi **A** e **B** sono uguali
- ▶ **$b \in A$ (appartenenza)**: l'elemento **b** appartiene all'insieme **A**
- ▶ **$b \notin A$ (non appartenenza)**: l'elemento **b** non appartiene all'insieme **A**
- ▶ **$A = \emptyset$** : l'insieme **A** è vuoto
- ▶ **$A \subset B$** : l'insieme **A** è un **sottoinsieme** di **B**
ciò vuol dire che ogni elemento di **A** appartiene anche a **B**, ma non viceversa;
es. **A** è l'insieme delle città della Lombardia, **B** l'insieme delle città italiane
- ▶ **$C = A \cap B$ (intersezione)**: l'insieme **C** è costituito dagli elementi in comune tra **A** e **B**
- ▶ **$C = A \cup B$ (somma)**: l'insieme **C** è costituito dalla somma degli insiemi **A** e **B**

CORRISPONDENZE TRA INSIEMI

Gli elementi di due differenti insiemi possono essere in relazione tra loro. Questa relazione si chiama **corrispondenza**.

Es. l'insieme **A** degli abbonati telefonici e l'insieme **B** dei numeri telefonici: a ogni abbonato è abbinato un numero; perciò si dice che **A** e **B** sono in corrispondenza.

Tipi di corrispondenze

- ▶ **Univoca**
Si ha quando a ogni elemento del primo insieme corrisponde un solo elemento del secondo, ma non viceversa (a un elemento del secondo insieme possono corrispondere anche più elementi del primo).
- ▶ **Biunivoca**
Si ha quando a ogni elemento del primo insieme corrisponde un solo elemento del secondo insieme e viceversa.

I NUMERI

I numeri sono classificati in **insiemi**, quindi, indicati ognuno con una **lettera maiuscola**.

Ogni insieme di numeri ha le sue **operazioni** (addizione, sottrazione etc.) che possono essere di 2 tipi:

- **operazione interna**

Si ha quando il risultato dell'operazione è un numero che appartiene allo stesso insieme di partenza.

Es. la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale: $2 + 5 = 7$

- **operazione non interna**

Si ha quando il risultato dell'operazione *non è sempre* un numero che appartiene allo stesso insieme.

Es. la sottrazione di due numeri naturali: $4 - 3 = 1$ (dà un numero naturale), ma $3 - 4 = -1$ (dà un numero relativo)

► **Numeri Naturali (N)**

Numeri interi positivi, compreso lo zero (0, 1, 2, 3, 4, 5 etc.)

operazioni interne: addizione, moltiplicazione

► **Numeri Relativi (Z)**

Sono i numeri **positivi** (Z^+) e **negativi** (Z^-)

-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc.

operazioni interne: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione

► **Numeri Razionali (Q)**

Possono essere indicati o come **frazione** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ o come **parte intera**

+ **parte decimale** (1,5; 0,7; 4,8)

operazioni interne: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione

► **Numeri Irrazionali (J)**

Non possono essere trasformati in un numero razionale.

Es. $\div 2$ (dà un valore dalla cifra decimale infinita: 1,4142135624...)

► **Numeri Reali (R)**

Sono l'unione tra Q e J. Quindi $R = Q \cup J$

Insiemi numerici

Come si vede, gli insiemi numerici sono in relazione fra loro.

Es. **N** è un sottoinsieme di **Z** ($N \subset Z$); **Z** è a sua volta un sottoinsieme di **Q** ($Z \subset Q$); tutti sono un sottoinsieme di **R**.

LE OPERAZIONI CON I NUMERI NATURALI (N)			
	Interna	Descrizione	Proprietà
addizione	si	produce la somma fra due numeri chiamati addendi	proprietà commutativa una somma non cambia se si cambia l'ordine degli addendi es. $2 + 18 = 18 + 2$

Segue

<p>sottrazione</p>	<p>no</p>	<p>produce la differenza tra due numeri il primo dei quali si chiama minuendo e il secondo sottraendo</p>	<p>proprietà associativa: la somma di più addendi non cambia, se a due o più di essi si sostituisce la loro somma es. $(4 + 7) + 1 = 4 + (7 + 1)$</p>
<p>moltiplicazione</p>	<p>si</p>	<p>calcola il prodotto tra due numeri detti fattori; il prodotto è la somma di tanti addendi uguali al primo quante sono le unità del secondo es. $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$</p>	<p>proprietà invariantiva: aggiungendo o togliendo uno stesso numero sia al minuendo che al sottraendo, la differenza non cambia es. $5 - 3 = (5 + 2) - (3 + 2)$</p> <p>proprietà commutativa: il prodotto non cambia se si inverte l'ordine dei fattori es. $2 \times 3 = 3 \times 2$</p> <p>proprietà associativa: il prodotto di più fattori non cambia, se a due o più di essi si sostituisce il loro prodotto es. $(4 \times 7) \times 2 = 4 \times (7 \times 2)$</p> <p>proprietà distributiva: per moltiplicare una somma per un numero, si possono moltiplicare per quel numero i singoli addendi e sommare i prodotti ottenuti es. $(3 + 5 + 2) \times 7 = (3 \times 7) + (5 \times 7) + (2 \times 7)$</p>
<p>divisione</p>	<p>no</p>	<p>calcola il quoziente tra due numeri detti il primo dividendo e il secondo divisore; il quoziente è il numero che moltiplicato per il divisore dà come prodotto il dividendo</p>	<p>proprietà distributiva rispetto all'addizione: per dividere una somma per un numero, si può anche dividere per quel numero i singoli addendi e sommare i quozienti es. $(4 + 8) : 2 = (4 : 2) + (8 : 2)$</p> <p>proprietà distributiva rispetto alla moltiplicazione: per dividere un prodotto per un numero si può dividere uno solo dei fattori per quel numero e moltiplicare il quoziente per gli altri fattori es. $(5 \times 2 \times 6) : 3 = 5 \times 2 \times (6 : 3)$</p> <p>proprietà invariantiva: il quoziente di due numeri non cambia se si moltiplica o si divide per uno stesso numero ciascuno di essi es. $4 : 2 = (4 \times 3) : (2 \times 3)$</p>

Osservazioni

- moltiplicando un numero per **1** si ottiene lo stesso numero: $3 \times 1 = 3$
- moltiplicando un numero per **0** si ottiene 0: $3 \times 0 = 0$
- nella divisione, quando non esiste un quoziente appartenente ai numeri naturali, si produce il **quoziente approssimato** più il **resto**; es. $52 : 10 = 50$ (quoziente appr.) + 2 (resto)
- nelle espressioni con più operazioni, ove non indicato dalle parentesi, si effettuano prima le **moltiplicazioni** e le **divisioni**: $4 \times 5 + 6 : 2 = (4 \times 5) + (6 : 2) = 20 + 3 = 23$

- 19) Qual è il grado assoluto del polinomio $3x^4y^3 - 5xy^6 + 4x^5y^6$?
- A) 7. C) 18.
 B) 11. D) 8.
- 20) Qual è la mediana della successione {4, 12, 17, 22, 45, 87, 100}?
- A) 22. C) 35.
 B) 29. D) 49.
- 21) Qual è il valore della x nell'eguaglianza $3x + 4 - 5x = 4x + 9 - 2x + 3$?
- A) 1. C) 3.
 B) -2. D) -2,5.
- 22) Intendendo con N l'insieme dei numeri naturali, quanto vale $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{x : x = 2n, n \in N\}$?
- A) N . C) $\{x : x = 2n + 1, n \in N\}$.
 B) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. D) \emptyset .
- 23) Quale di queste è un'equazione spuria?
- A) $2x^2 + 3x - 5 = 0$. C) $2x - 3 = 0$.
 B) $2x^2 + 3x = 0$. D) $3x^2 = 4$.

GEOMETRIA PIANA E SOLIDA

- 1) Qual è la formula per calcolare la base di un triangolo, note l'area e l'altezza?
- A) $b = \frac{2 \times A}{h}$. C) $b = \frac{A}{h}$.
 B) $b = \frac{2 \times h}{A}$. D) $b = \frac{h}{a}$.
- 2) Come si calcola il volume di una piramide, nota l'area di base A_b e l'altezza h ?
- A) $V = \frac{A_b}{h}$. C) $V = \frac{A_b \times h}{3}$.
 B) $V = \frac{h}{A_b}$. D) $V = A_b \times h$.
- 3) Qual è il valore dell'area di un rombo avente le diagonali di 10 cm e 24 cm?
- A) 60 cm^2 . C) 180 cm^2 .
 B) 120 cm^2 . D) 235 cm^2 .

RISPOSTE COMMENTATE

ARITMETICA E ALGEBRA

1) Risposta esatta: **D**

Il minimo comune multiplo è il più piccolo numero divisibile senza resto per ciascuno dei numeri interi di un insieme assegnato. Il minimo comune multiplo (mcm) può essere definito fra due o più numeri: si determina scomponendo i numeri dati in fattori primi e calcolando il prodotto di questi ultimi, ciascuno preso una sola volta e con il massimo esponente.

2) Risposta esatta: **C**

Basta impostare la proporzione $100 : 120 = 72 : x$ da cui si ricava che $x = 86,40$

3) Risposta esatta: **D**

Il reciproco di un numero si ottiene invertendo numeratore e denominatore e lasciando inalterato il segno.

4) Risposta esatta: **B**

Il massimo comune divisore è il più grande fattore comune a un insieme assegnato di numeri. Il massimo comune divisore (MCD) è ottenibile dal prodotto di tutti i fattori primi comuni ai numeri dell'insieme, presi con l'esponente minore.

5) Risposta esatta: **D**

La proprietà invariante dice che aggiungendo o togliendo ai due termini di una sottrazione uno stesso numero la differenza non cambia.

6) Risposta esatta: **A**

Qualunque frazione, avente 0 al numeratore, è uguale a 0.

7) Risposta esatta: **D**

Di contro: il prodotto di due potenze è uguale ad una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti mentre il quoziente di due potenze è uguale ad una potenza che ha come base la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti.

8) Risposta esatta: **B**

$C(= 100) + XL(= 40) + V(= 5) + II(= 2)$. Il sistema di simboli numerici ideato dai romani permetteva di indicare tutti i numeri da 1 a 1.000.000 con un totale di soli sette simboli: I per 1, V per 5, X per 10, L per 50, C per 100, D per 500, e M per 1000. Le cifre romane si leggono da sinistra a destra, a partire dai simboli che rappresentano le quantità più elevate, via via decrescendo fino alle unità.

9) Risposta esatta: **C**

1 decimetro equivale a 0,1 metri; altri sottomultipli del metro sono il centimetro (= 0,01) metri ed il millimetro (= 0,001 metri).

10) Risposta esatta: B

Il rapporto tra due numeri è una scrittura che indica una divisione non eseguita. Il primo numero di un rapporto si dice *antecedente*, il secondo *conseguente*; entrambi si dicono *termini del rapporto*.

11) Risposta esatta: A

Con il linguaggio dell'aritmetica, infatti, non è possibile enunciare relazioni matematiche universali, come il teorema di Pitagora, ma se ne possono trattare solo casi particolari. La relazione aritmetica $3^2 + 4^2 = 5^2$ è ad esempio l'applicazione della legge generale prescritta dal teorema di Pitagora al caso particolare di un triangolo rettangolo di ipotenusa pari a 5, e di cateti lunghi rispettivamente 3 e 4. Nel linguaggio dell'algebra diventa possibile esprimere tale legge in tutta la sua generalità, utilizzando dei simboli letterali per rappresentare le misure dei lati del triangolo; il teorema si scriverà dunque $a^2 + b^2 = c^2$, e in questa forma può essere applicato a qualsiasi triangolo rettangolo.

12) Risposta esatta: B

La proprietà dello scomporre stabilisce invece che in ogni proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la differenza degli altri due sta al terzo (o al quarto).

13) Risposta esatta: A

Per elevare a potenza un quoziente basta elevare a quella potenza il dividendo ed il divisore.

14) Risposta esatta: B

Si ricorda che l'addizione gode delle proprietà commutativa, associativa e dissociativa.

15) Risposta esatta: A

Il sistema binario svolge un ruolo importante nella tecnologia dei computer. I primi 20 numeri della notazione binaria sono 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10100, dove, procedendo da destra verso sinistra, i singoli simboli rappresentano i coefficienti delle potenze successive di due. Ad esempio, nell'esercizio considerato, cominciando da destra, 10100101 equivale a $(1 \times 2^0) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^5) + (0 \times 2^6) + (1 \times 2^7) = 1 + 4 + 32 + 128 = 165$. Per trasformare 165 in binario bisogna dividere sempre per 2 il numero e prendere i resti delle divisioni (che verranno sempre 0 oppure 1) ordinati in senso opposto (cioè dal resto dell'ultima divisione, cioè 1:2, fino al resto della prima divisione), che formeranno la cifra binaria.

16) Risposta esatta: A

Nei problemi del tre semplice diretta le grandezze sono direttamente proporzionali, mentre in quelli del tre semplice inversa le grandezze sono inversamente proporzionali. Nell'esercizio in particolare si deve impostare la seguente proporzione $12 : 56 = 0,90 : x \Rightarrow (56 \cdot 0,90)/12 = 4,2$.

17) Risposta esatta: D

Un numero è divisibile per 11 quando la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari è zero. Nell'esercizio $(1 + 7 + 2 + 2) - (3 + 6 + 3) = 12 - 12 = 0$.

18) Risposta esatta: A

Una frazione si dice impropria quando il numeratore è maggiore del denominatore ed il suo valore sarà dunque maggiore di 1.

19) Risposta esatta: B

Se una lettera compare in uno o più monomi di un polinomio, il maggiore degli esponenti di tale lettera si dice grado del polinomio rispetto a quella lettera; dicesi grado assoluto del polinomio, il maggiore dei gradi assoluti dei suoi monomi.

20) Risposta esatta: A

Dati n elementi, disposti in ordine crescente o decrescente, la mediana il valore dell'elemento che occupa il valore centrale della distribuzione. Dato che la distribuzione comprende 7 elementi, la mediana sarà data dal quarto elemento della successione, ovvero 22.

21) Risposta esatta: B

Basterà portare al primo membro tutti i termini contenenti l'incongnita e al secondo membro tutti i termini noti, trovando $-4x = 8$, da cui $x = -8/4 = -2$.

22) Risposta esatta: B

Intersecando l'insieme formato dai soli elementi pari 2, 4, 6, 8 e 10 con l'insieme di tutti i numeri pari si otterrà come risultato l'insieme costituito dagli elementi comuni ai due insiemi e dunque lo stesso insieme {2, 4, 6, 8, 10}.

23) Risposta esatta: B

Un'equazione di secondo grado si dice spuria quando manca del termine noto.

GEOMETRIA PIANA E SOLIDA**1) Risposta esatta: A**

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto della base per l'altezza.

2) Risposta esatta: C

Il volume di una piramide si ottiene moltiplicando l'area di base per la misura dell'altezza e dividendo il prodotto ottenuto per 3.

3) Risposta esatta: B

L'area di un rombo si ottiene moltiplicando le misure delle diagonali e dividendo il prodotto ottenuto per 2.

4) Risposta esatta: B

Basta applicare il teorema di Pitagora: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

5) Risposta esatta: D

Il *punto* è un ente geometrico privo di dimensioni, ossia non ha lunghezza, né altezza, né profondità; la *linea* è un insieme ordinato di punti; essa ha la sola dimensione della lunghezza e può essere *aperta* o *chiusa*; per *piano* si intende una superficie piana che si estende infinitamente in tutti i sensi.

6) Risposta esatta: D

Bisogna prima rappresentare le due figure e quindi applicare il criterio di similitudine tenendo conto che:

$$AE : FJ = BC : GH$$

$$5 : 20 = 40 : GH$$

$$\text{da cui } GH = (20 \cdot 40) / 5 = 160\text{cm}$$

7) Risposta esatta: C

Bisogna disegnare i due pentagoni facendo bene attenzione al fatto che essi hanno un vertice in comune quindi sono inscritti. Per la similitudine avremo che

$$DI : CD = DF : DE$$

$$20 : 50 = DF : 45$$

$$\text{da cui } DF = (20 \cdot 45) / 50 = 18\text{cm}$$