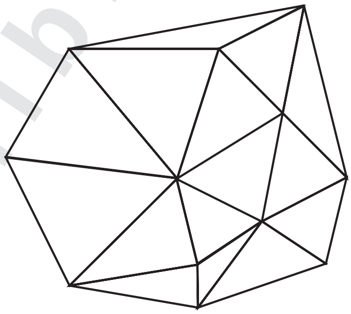
Geometria solida

POLIEDRI, DEFINIZIONI, AREE E VOLUMI

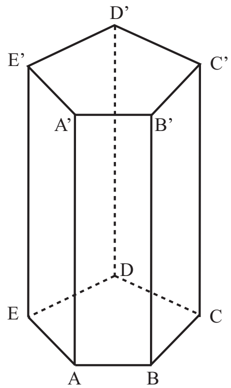
1. GENERALITÀ



Tra le figure solide esiste una tipologia come quella a lato, che è limitata da poligoni i quali sono posti in piani diversi ed in modo tale che ogni lato di ciascuno di essi è comune ad un altro poligono.
Si definisce ***poliedro*** *una parte di spazio limitata da poligoni* giacenti in piani diversi e tale che ogni lato sia comune a due *poligoni.*
In un poliedro si distinguono:
- ***facce*** = poligoni componenti il poliedro;
- ***vertici*** = punti d'incontro degli estremi dei lati dei poligoni;
- ***spigoli*** = lati dei poligoni.

L'insieme di tutte le facce prende il nome di ***superficie del poliedro***.
Un poliedro si definisce ***convesso*** se non è tagliato da nessuno dei piani delle sue facce. In caso contrario il poliedro di dice ***concavo***. Nella geometria solida oggetto del concorso si studiano solo i poliedro convessi.
Il numero minimo di facce che può avere un poliedro è 4 ed in tal caso si chiama ***tetraedro***. In modo del tutto analogo se le facce sono cinque il poliedro prende il nome di ***pentaedro,*** se le facce sono sei ***esaedro*** e così via.
Si chiamano ***diagonali*** di un poliedro i segmenti che congiungono due vertici non appartenenti ad una stessa faccia.

2. PRISMI



Prisma

È il poliedro limitato da due poligoni uguali giacenti su due piani paralleli e da tanti parallelogrammi, ottenuti dal congiungimento dei due vertici corrispondenti delle due basi, quanti sono i lati del poligono base.
L'insieme di tutte le facce laterali forma la superficie laterale; l'insieme delle due basi e della superficie laterale costituisce la superficie totale del prisma.

I lati delle facce si chiamano spigoli laterali che in un prisma retto sono uguali all'altezza, cioè alla distanza fra i piani delle due basi.
Il prisma si dice triangolare, quadrangolare, pentagonale secondo che le sue basi siano triangoli, quadrangoli, pentagoni ecc.
L'*area laterale* (A_l) del prisma è uguale alla misura del perimetro di base (p_b) moltiplicata per la misura dello spigolo laterale o altezza (s).

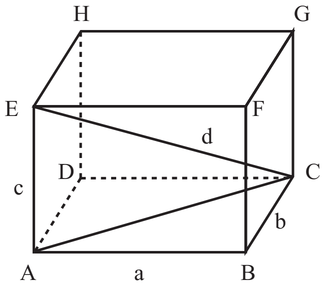
$$A_l = p_b \cdot s$$

L'*area totale* (A_t) si trova sommando all'area laterale l'area delle due basi ($A_b + A_b'$).
Il *volume* si determina moltiplicando l'area della base (A_b) per la misura dell'altezza.

$$A_t = A_l + (A_b + A_b') \qquad V = A_b \cdot s$$

Parallelepipedo

Il parallelepipedo è un prisma avente per basi due parallelogrammi.

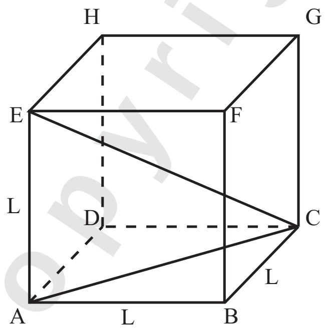


Poiché anche le facce laterali sono dei parallelogrammi, il parallelepipedo è limitato da sei parallelogrammi che sono a due a due uguali e situati su piani paralleli.
Gli spigoli sono uguali a quattro a quattro.
Pertanto un parallelepipedo ha *6 facce, 12 spigoli* e *8 vertici.* Un parallelepipedo retto e regolare ha la base quadrata; se è rettangolo ha le dimensioni uguali e quindi è un cubo.
Per trovare l'area laterale, totale e il volume valgono le stesse regole del prisma.
Per calcolare la lunghezza di una diagonale di un parallelogramma rettangolo si estrae la radice quadrata della somma dei quadrati delle misure delle tre dimensioni.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

La formula suddetta è nota anche come "Teorema di Pitagora nello spazio".

Cubo o esaedro



È la figura geometrica solida delimitata da sei facce, cioè sei quadrati uguali; quindi ha 8 vertici e 12 spigoli uguali.
È il parallelepipedo rettangolo che ha le tre dimensioni uguali.

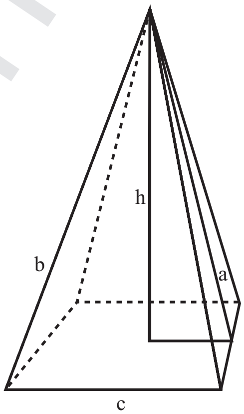
$A_l = l^2$ (area di una faccia) $\cdot$ 4

$A_t = l^2 \cdot 6 \quad V = l^3$

La lunghezza della diagonale si ottiene moltiplicando la lunghezza dello spigolo per la radice quadrata di 3 (1,732).

$$d = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{3 \cdot l^2} = l \cdot \sqrt{3}$$

3. PIRAMIDI



La piramide regolare è il solido (poliedro) costituito dal poligono di base e da tanti triangoli con un vertice comune (vertice della piramide), che costituiscono le facce laterali.
Dicesi altezza della piramide la distanza del vertice dal piano di base.
In una piramide regolare l'apotema cade nel centro del lato della base.
Una piramide si dice retta quando la base è un poligono inscrivibile in una circonferenza e l'altezza della piramide cade al centro di tale circonferenza.
In una piramide retta l'apotema è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono l'altezza della piramide e il raggio della circonferenza inscritta nella base. Si rammenti che una piramide se non è retta, non ha apotema.
Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa altezza e la stessa base o apotema di base.

$$A_l = \frac{(p_b \cdot a_p)}{2} \qquad A_t = A_l + A_b \qquad V = \frac{(A_b \cdot h)}{3}$$

4. POLIEDRI REGOLARI

Definizione: *Un* ***poliedro*** *si dice* ***regolare*** *se le sue facce sono poligoni regolari uguali ed i suoi diedri sono tutti uguali.*
Ne consegue che anche gli *spigoli* e gli *angoloidi* di un poliedro regolare risultano uguali tra loro.
Il cubo pertanto è un poliedro regolare. Si osservi, invece, che il prisma regolare e la piramide regolare non sono, in generale, poliedri regolari nel senso stabilito dalla definizione appena data.

A differenza dei poligoni regolari, il cui numero è illimitato, i poliedri regolari sono in numero limitato, ed in particolare:

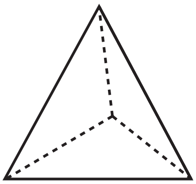
Teorema: *Esistono soltanto cinque tipi di poliedri regolari.*

Dimostrazione

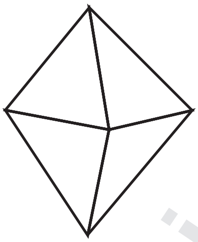
Per dimostrarlo basta considerare che *per gli angoloidi* (saranno trattati nel capitolo successivo) che si vengono a determinare in ogni vertice del poliedro, *la somma delle facce è sempre minore di quattro angoli retti*.

I casi che si possono determinare sono:

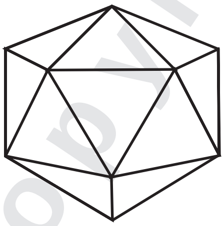
1. ***Le facce del poliedro regolare sono triangoli equilateri*** (quindi angoli di 60°). Ne consegue che ogni suo angoloide non può avere che *tre*, *quattro* o *cinque* facce.
Se ne avesse sei o più, la somma delle facce sarebbe uguale o maggiore di quattro retti (60° 6 = 360°) il che è impossibile.
2. ***Le facce del poliedro regolare sono quadrati*** (quindi angoli di 90°). Ogni angoloide del poliedro non può avere che *tre* facce.
3. ***Le facce del poliedro regolare sono pentagoni regolari*** (quindi angoli di 108°). Ogni angoloide del poliedro non può che avere *tre* facce.
4. ***Le facce del poliedro regolare sono esagoni regolari*** (quindi angoli di 120°). Non esistono poliedri regolari aventi per facce esagoni o poligoni con un numero maggiore di lati, perché in tal caso la somma delle facce, anche solo di tre (*numero minimo*), di ogni angoloide risulterebbe maggiore o uguale di quattro angoli retti.



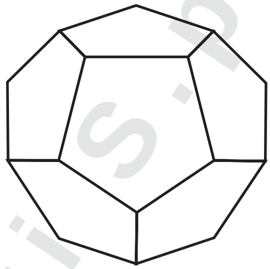
Dal caso 1 si hanno tre poliedri regolari le cui facce sono formate da triangoli equilateri.
Il primo poliedro è il ***tetraedro regolare***, che ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli.
Praticamente si tratta di una piramide regolare a base triangolare.



Il secondo poliedro è l'***ottaedro regolare***, che ha 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli.



Il terzo ed ultimo poliedro regolare a facce triangolari è l'***icosaedro regolare***, che ha 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli.
Dal caso 2 si ha un solo poliedro regolare le cui facce sono quadrati ed è il ***cubo*** con 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli.



Dal caso 3 si ha, infine, un solo poliedro regolare le cui facce sono pentagoni regolari ed è il ***dodecaedro regolare*** con 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli.

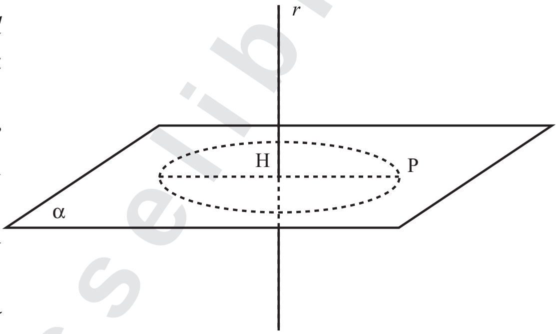
Se si indica con F il numero delle facce, con V il numero dei vertici e con S il numero degli spigoli di un poliedro generico, anche se non regolare, esiste tra questi numeri una relazione importante detta ***relazione di Eulero***:

F + V = S + 2	**Relazione di Eulero**

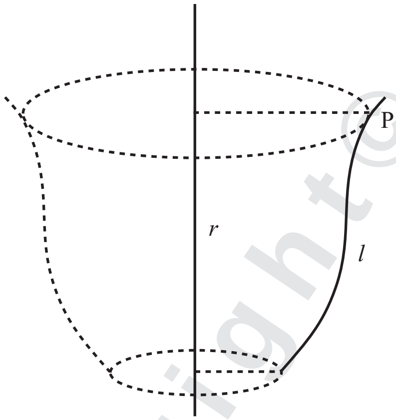
Essendo le facce di un poliedro regolare tutti poligoni regolari è palese che *l'area della superficie di un poliedro regolare si ottiene moltiplicando l'area di una sua faccia per il numero delle facce.*

SUPERFICI E SOLIDI DI ROTAZIONE

Si consideri una retta *r* ed un punto *P* esterno ad essa, sia $\overline{PH}$ il segmento rappresentante la distanza tra *P* ed *r* condotto nel piano individuato dal punto *P* e dalla stessa retta *r*. Sia ora α il piano contenente *P* ed ortogonale ad *r*. *Il punto P, muovendosi nel piano* α *in modo che resti costante la distanza da r, descrive una circonferenza giacente nel piano* α *di centro H e raggio PH*. La retta *r* prende il nome di ***asse di rotazione*** di tale circonferenza.



Si consideri adesso una retta *r* ed una linea *l*, non attraversata dalla retta; facendo muovere la linea *l* intorno alla retta *r* di un giro completo come appena visto ogni punto P della linea genera una circonferenza avente il centro sull'asse di rotazione *r* e raggio uguale alla distanza, del punto considerato, da *r*.



In questo modo *la linea l genera una superficie, formata dalle infinite circonferenze generate dagli infiniti punti della linea*, che prende il nome di ***superficie di rotazione***.

La retta *r* prende il nome di *asse di rotazione* della superficie.

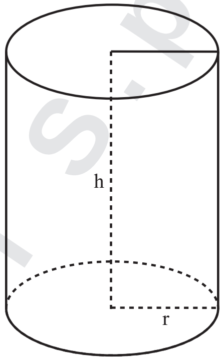
La linea *l* prende il nome di ***generatrice*** della superficie.

Infine *se invece di far ruotare una curva intorno ad una retta si fa ruotare una superficie piana si ottiene un solido che prende il nome di **solido di rotazione***.

I principali solidi di rotazione sono quelli che si ottengono dalla rotazione di un rettangolo, di un triangolo e di un semicerchio e sono il *cilindro*, il *cono* e la *sfera*.

1. CILINDRO

Il cilindro retto è il solido che si ottiene dalla rotazione completa (360°) di un *rettangolo* attorno a uno dei suoi lati.

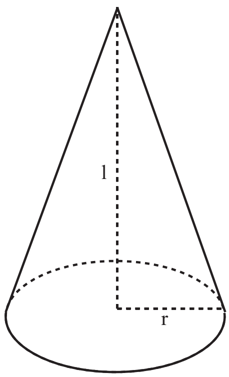


Il lato fisso si dice *asse* o *altezza*; i due lati opposti descrivono due cerchi uguali, situati su piani paralleli, che prendono il nome di basi del cilindro, mentre il lato parallelo all'asse si dice generatrice e genera la superficie laterale del cilindro.
Un cilindro si dice equilatero quando l'altezza è uguale al diametro della circonferenza di base.

$A_l = cfr \cdot h = 2\pi rh \qquad A_t = A_l + (2 \cdot A_b) \qquad V = A_b \cdot h = \pi r^2 h$

Un cilindro è equivalente a un prisma con la base equivalente alla base del cilindro e con altezza congruente a quella del cilindro.
La sezione di un cilindro equilatero con un piano passante per l'asse è un quadrato.
La sezione di un cilindro con un piano non parallelo né perpendicolare all'asse è una ellisse.

2. CONO



Il cono è il solido che si ottiene facendo ruotare completamente (360°) un *triangolo rettangolo* attorno a uno dei suoi cateti.
Il cateto fisso si chiama *asse* o *altezza*; l'ipotenusa del triangolo rettangolo corrisponde all'*apotema*; il cateto mobile diventa *raggio di base* del cono.
Il cono è equivalente a una piramide avente per base un poligono equivalente alla base del cono e per altezza la stessa altezza.

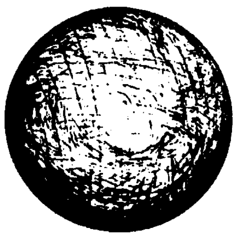
$$A_l = \frac{\left(cfr \cdot a_p\right)}{2}$$

$$A_t = A_l + A_b$$

$$V = \frac{\left(A_b \cdot h\right)}{3}$$

Il cono si dice *equilatero* quando l'apotema e il diametro del cerchio di base sono congruenti.
Il *tronco di cono* è un solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi.

3. SFERA



La sfera è il solido generato dalla rotazione completa (360°) di un *semicerchio* intorno al proprio diametro oppure dalla rotazione parziale (180°) di un cerchio intorno al proprio diametro.
Il raggio, il centro e il diametro del semicerchio diventano anche raggio, centro e diametro della sfera.

Il diametro intorno al quale ruota il semicerchio generatore della sfera si dice anche *asse* della sfera e i suoi estremi prendono il nome di *poli*.
Ogni piano che passa per il centro taglia la sfera secondo un cerchio che si dice *cerchio massimo*. Ad esempio per quello che riguarda la terra: le circonferenze massime che passano per i due poli della sfera sono dette meridiani. Il parallelo di diametro massimo è l'equatore che divide la sfera in due emisferi. Un piano secante non passante per il centro divide la sfera in due parti dette calotte sferiche.
La superficie della sfera è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno uguale distanza da un punto fisso detto centro, ed è equivalente a quattro volte quella di un suo cerchio massimo.
L'*area* della sfera (As) si trova moltiplicando l'area del cerchio massimo per 4.

$$As = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{cioè} \quad As = 12{,}56 \cdot r^2$$

Il *volume* si trova moltiplicando l'area della superfice della sfera per il raggio e dividendo il prodotto per 3.

$$V = \frac{(A_s \cdot r)}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{ossia} \quad \frac{(12{,}56 \cdot r)^2}{3}$$

Il volume si può trovare anche moltiplicando il raggio al cubo per i 4/3 di 3,14 (cioè 4,188).

$$V = r^3 \cdot 4{,}188$$

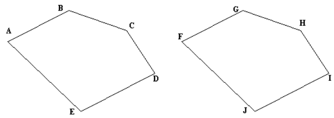
È conveniente applicare quest'ultima formula quando la misura del raggio non è un multiplo di 3, per cui non si potrebbe eseguire la semplificazione.
In una sfera inscritta in un cubo, lo *spigolo* del cubo stesso è congruente al diametro della sfera.

Archimede ha inoltre dimostrato che:

— la superficie della sfera è equivalente alla superficie laterale del cilindro equilatero a essa circoscritto;
— la sfera è equivalente a due terzi del cilindro equilatero a essa circoscritta.

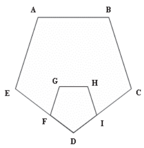
QUESITI DI VERIFICA

1) La figura ABCDE è simile alla figura FGHIJ. Se AE = 5cm, FJ = 20cm e BC = 40cm, quanto vale GH?



❑ **A)** 10cm.
❑ **B)** 25cm.
❑ **C)** 45cm.
❑ **D)** 160cm.

2) Se il pentagono ABCDE è simile al pentagono GHIDF, e DI = 20cm, CD = 50cm e DE = 45cm, quanto è DF?



❑ **A)** 112,5cm.
❑ **B)** 25cm.
❑ **C)** 18cm.
❑ **D)** 15cm.

3) Il perimetro di un rettangolo è di 68 cm. Uno dei lati supera di 27 cm l'altro. Trovare l'area del rettangolo.

❑ **A)** 104,65 cmq.
❑ **B)** 106,4 cmq.
❑ **C)** 106,75 cmq.
❑ **D)** 102,75 cmq.

4) Come si calcola il numero delle diagonali di un poligono?

❑ **A)** $n\dfrac{(n-2)}{2}$.
❑ **B)** $n\dfrac{(n-3)}{2}$.
❑ **C)** $n(n-3)$.
❑ **D)** $n(n-2)$.

5) Se in un pentagono la somma di quattro angoli è pari a 470°35', quanto misura l'angolo rimanente?

❑ **A)** 119°25'.
❑ **B)** 69°25'.
❑ **C)** 89°15'.
❑ **D)** 90°25'.

6) Calcolare l'area di un triangolo sapendo che i suoi tre lati misurano cm. 3; dm. 0,4; mm. 50.

❑ **A)** $m.^2$ 0,0006.
❑ **B)** $cm.^3$ 60.
❑ **C)** cm^2 0,6.
❑ **D)** cm. 3.

7) Calcolare il volume di un parallelepipedo sapendo che l'area di base è $dm.^2$ 24 e che l'altezza è i 3/4 dell'area di base.

❑ **A)** $dm.^3$ 432.
❑ **B)** $dm.^2$ 432.
❑ **C)** dm^3 43,2.
❑ **D)** dm^3 240.

8) Calcolare la misura dello spigolo del cubo, sapendo che la superficie laterale è di $cm.^2$ 36.

❑ **A)** cm. 9.
❑ **B)** dm. 30.
❑ **C)** $dm.^2$ 6.
❑ **D)** cm. 3.

9) Calcolare la superficie laterale di un prisma a base pentagonale sapendo che l'altezza del prisma è di cm. 4 e che il lato del pentagono misura dm. 0,2.

❑ **A)** $cm.^2$ 40.
❑ **B)** $dm.^2$ 40.
❑ **C)** $cm.^2$ 55.
❑ **D)** $dm.^2$ 15.

10) Una piramide che ha base pari a 300 cm^2 ed altezza pari a 10 cm è equivalente ad un cubo che ha lo spigolo pari a:

❑ **A)** 100 cm.
❑ **B)** 1000 cm.
❑ **C)** 30 cm.
❑ **D)** 10 cm.

RISPOSTE COMMENTATE

1) Risposta esatta: D

Bisogna prima rappresentare le due figure e quindi applicare il criterio di similitudine tenendo conto che:

AE : FJ = BC : GH
5 : 20 = 40 : GH
da cui GH = $(20 \cdot 40)/5 = 160$cm

2) Risposta esatta: C

Bisogna disegnare i due pentagoni facendo bene attenzione al fatto che essi hanno un vertice in comune quindi sono inscritti. Per la similitudine avremo che

DI : CD = DF : DE
20 : 50 = DF : 45
da cui DF = $(20 \cdot 45)/50 = 18$cm

3) Risposta esatta: C

Anche in questo caso si costruisca il sistema del tipo $\begin{cases} 2x + 2y = 68 \\ x = y + 27 \end{cases}$ e si risolva con uno dei metodi visti innanzi.

4) Risposta esatta: B

5) Risposta esatta: B

Sapendo che la somma degli angoli di un pentagono è uguale a 540° avremo: 540° – 470°35’ = 69°25’.

6) Risposta esatta: A

Si applica dopo aver effettuato le dovute equivalenze, la formula di Erone: p = semiperimetro.

$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$; a = cm 3, b = cm 4, c = cm 5. $A = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{36} = \text{cm}^2 6$;
$\text{cm}^2\ 6 = \text{m}^2\ 0{,}0006$.

7) Risposta esatta: A

La formula per il volume è: $a \cdot b \cdot c$; cioè area di base $\cdot\, h$; perciò $\text{dm}^2\,24 \cdot \frac{3}{_1\cancel{4}} \cdot \cancel{24}^{6} = 24 \cdot 18 = 432\text{dm}^3$.

8) Risposta esatta: D

Lo spigolo del cubo equivale al lato di una qualsiasi faccia quadrata che lo compone. Sapendo l'area laterale, possiamo conoscere l'area di una faccia e poi calcolare la misura dello spigolo= s1 : 4 = 36 : 4 = 9; s = $\sqrt{9}$ = cm3.

9) Risposta esatta: A

Premesso che la formula della superficie laterale del prisma è pb · h, bisogna calcolare il perimetro del pentagono in cm: dm 0,2 = cm 2; p = 2 · 5 = 10; A1 = 10 · 4 = cm^2 40.

10) Risposta esatta: D

Il volume della piramide è (300 · 10)/3 = 1000 cm^3. Il volume del cubo, essendo equivalente, sarà anch'esso 1000 cm^3. Lo spigolo sarà pari a $\sqrt[3]{1000}$ = 10cm.