

ARITMETICA

1. NUMERAZIONE ROMANA

Nella numerazione romana, basata sul *principio additivo*, due simboli giustapposti (vicini) rappresentano la somma dei numeri rappresentati da essi, cioè ad esempio:

$$\text{II} = 2 \text{ ossia } 1 + 1$$

$$\text{VI} = 6 \text{ cioè } 5 (\text{V}) + 1 (\text{I})$$

$$\text{CL} = 150 \text{ cioè } 100 (\text{C}) + 50 (\text{L})$$

Il principio additivo vale anche nel caso di più di due numeri allineati come ad esempio:

$$\text{VIII} = 8 \quad \text{ovvero } 5 (\text{V}) + 1 (\text{I}) + 1 (\text{I}) + 1 (\text{I})$$

$$\text{LXX} = 70 \quad \text{cioè } 50 (\text{L}) + 10 (\text{X}) + 10 (\text{X})$$

In tal caso, tuttavia, vige la regola che non si può usare più di tre volte consecutivamente lo stesso simbolo.

Per non disperdersi in scritture troppo lunghe si può usare anche il *metodo per differenza* che sottrae il simbolo scritto per primo (inferiore) da quello scritto per secondo (superiore). Esempi:

$$\text{IV} = 4; \quad 5 (\text{V}) - 1 (\text{I})$$

$$\text{IX} = 9; \quad 10 (\text{X}) - 1 (\text{I})$$

$$\text{XL} = 40; \quad 50 (\text{L}) - 10 (\text{X})$$

$$\text{XLIX} = 49; \quad 50 (\text{L}) - 10 (\text{X}) + 9 (\text{IX})$$

$$\text{XCIX} = 99; \quad 100 (\text{C}) - 10 (\text{X}) + 9 (\text{IX})$$

I simboli fondamentali della numerazione romana sono:

$$\text{I} = 1; \text{ V} = 5; \text{ X} = 10; \text{ L} = 50; \text{ C} = 100; \text{ D} = 500; \text{ M} = 1.000.$$

Elenco di alcuni numeri romani:

I	= 1	XI	= 11	XXX	= 30	CL	= 150
II	= 2	XII	= 12	XL	= 40	CC	= 200
III	= 3	XIII	= 13	L	= 50	CCC	= 300
IV	= 4	XIV	= 14	LX	= 60	CD	= 400
V	= 5	XV	= 15	LXX	= 70	D	= 500
VI	= 6	XVI	= 16	LXXX	= 80	DC	= 600
VII	= 7	XVII	= 17	XC	= 90	DCC	= 700
VIII	= 8	XVIII	= 18	C	= 100	DCCC	= 800
IX	= 9	XIX	= 19	CX	= 110	CM	= 900
X	= 10	XX	= 20	CXL	= 140	M	= 1.000

Esempi svolti: $1.749 = \text{MDCCXLIX}$; $2.532 = \text{MMDXXXII}$; $725 = \text{DCCXXV}$; $899 = \text{DCCCXCIX}$.

2. INTRODUZIONE

L'*aritmetica* è l'arte dei numeri. Infatti, contare e numerare è l'operazione che si compie sia per stabilire quanti sono gli oggetti che costituiscono il gruppo; sia nell'attribuire a ogni oggetto dello stesso gruppo una unità o nel nominare tali unità una di seguito all'altra.

I numeri da 0 a 9 sono le cifre significative.

L'unità sola si dice semplice o fondamentale.

Il numero 10 è alla base della numerazione in quanto un numero di 10 unità è una nuova unità che si dice di ordine superiore.

Per questo la nostra numerazione è detta *decimale* o a *base decimale*.

È opportuno ricordare le seguenti definizioni:

— *Valore assoluto* (o *modulo*) di un numero relativo: è il numero stesso, ma senza segno.

— *Numeri relativi concordi*: con lo stesso segno (es.: -4 e -8 , oppure $+7$ e $+11$).

— *Numeri relativi discordi*: con segno diverso (es.: -3 e $+5$, oppure $+8$ e -4).

— *Numeri relativi opposti*: con valore assoluto uguale e segno diverso. La somma di due numeri opposti è 0 (es.: -3 , $+3$).

— *Numeri relativi inversi* (o *reciproci*): il loro prodotto è $= 1$ (es.: 5 e $\frac{1}{5}$, $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{4}{3}$).

— *Numeri relativi antireciproci*: sono contemporaneamente inversi e discordi (es.: 2 e $-\frac{1}{2}$). In tal caso il loro prodotto è -1 .

— *Il prodotto di due numeri relativi concordi è positivo.*

— *Il prodotto di due numeri relativi discordi è negativo.*

— *Il prodotto di due numeri opposti è negativo.*

— *Se il prodotto di due numeri relativi è positivo*, i due numeri sono entrambi positivi o entrambi negativi.

— *Se il prodotto di due numeri relativi è negativo*, uno è negativo, l'altro è positivo.

— *Se il prodotto di due numeri relativi è nullo*, uno o entrambi sono nulli.

— *Se il prodotto di quattro numeri è un numero positivo*, allora i fattori concordi sono in numero pari.

— *Se una divisione tra numeri relativi ha come quoziente $+1$* , vuol dire che il dividendo è 0 e che il divisore è un numero qualunque.

— *Se la somma di due numeri relativi è nulla*, essi sono opposti.

— *Se la differenza di due numeri relativi è nulla, essi sono uguali. (La differenza di due numeri relativi è il numero che si ottiene aggiungendo al primo l'opposto del secondo).*

NUMERI INTERI

1° gruppo

1° ord. unità	— da	1	a	9
2° ord. decine	— da	10	a	99
3° ord. centinaia	— da	100	a	999

2° gruppo

4° ord. unità di migliaia	— da	1.000	a	9.999
5° ord. decine di migliaia	— da	10.000	a	99.999
6° ord. centinaia di migliaia	— da	100.000	a	999.999

3° gruppo

7° ord. un. di milioni	— da	1.000.000	a	9.999.999
8° ord. dec. di milioni	— da	10.000.000	a	99.999.999
9° ord. cen. di milioni	— da	100.000.000	a	999.999.999

4° gruppo

10° ord. un. di miliardi o bilioni:	— da	1.000.000.000	a	9.999.999.999
11° ord. dec. di miliardi o bilioni:	— da	10.000.000.000	a	99.999.999.999
12° ord. cen. di miliardi o bilioni:	— da	100.000.000.000	a	999.999.999.999

5° gruppo

13° ord. un. di trilioni	— da	1.000.000.000.000	a	9.999.999.999.999
14° ord. dec. di trilioni	— da	10.000.000.000.000	a	99.999.999.999.999
15° ord. cen. di trilioni	— da	100.000.000.000.000	a	999.999.999.999.999

I numeri interi si contano da destra verso sinistra.

Esempi sugli ordini dei numeri

Es.: Quante unità del 3° ordine ci sono nel numero 253.462?

Le unità del 3° ordine sono le centinaia, quindi in questo caso il numero 4 rappresenta le unità del 3° ordine.

Es.: 10^3 è l'ordine di grandezza del numero ...

In questo caso bisogna prima svolgere la potenza di 10^3 cioè $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$ e poi scegliere tra le opzioni quella che più si avvicina per «difetto» al numero dato, cioè, in questo caso, 1.000. Quindi se nell'esempio 10^3 le soluzioni possibili sono: a) 500 b) 190 c) 832 d) 1.020, bisogna scegliere l'alternativa c).

Es.: 10^{-1} è l'ordine di grandezza del numero ...

Poiché 10 alla meno uno è $1/10$ cioè 0,1 il numero da scegliere è quello che più si avvicina a 0,1 ... per difetto come nell'esempio precedente.

NUMERI DECIMALI

I numeri decimali vengono posti dopo la virgola e si enunciano nell'ordine:

— decimi	0,1
— centesimi	0,01
— millesimi	0,001
— decimillesimi	0,0001
— centomillesimi	0,00001
— milionesimi	0,000001
— decimilionesimi	0,0000001
— centomilionesimi	0,00000001
— bilionesimi o miliardesimi ..	0,000000001
— decimiliardesimi	0,0000000001
— centimiliardesimi	0,00000000001
— trilionesimi	0,000000000001 ecc.

Nota - I predetti numeri decimali si contano da sinistra verso destra.

PROPRIETÀ DELLE UGUAGLIANZE

Le scritture $4 + 3 = 7$; $2 + 3 = 5$; $6 + 3 = 9$ si dicono uguaglianze.

Il segno = si legge «è uguale»; $4 + 3$ si dice primo membro dell'uguaglianza e 7 secondo membro. Le proprietà sono:

1. *riflessiva*: ogni numero è uguale a se stesso. *Es.*: $3 = 3$;
2. *simmetrica*: se un numero è uguale ad un altro, questo è uguale al primo.

$$\text{Es.: } 4 + 3 = 7; \quad 7 \text{ è pure uguale a } 3 + 4$$

3. *transitiva*: se un numero è uguale a un altro e questo è uguale a un terzo, anche il primo sarà uguale al terzo.

$$\text{Es.: } 3 + 4 = 7; \quad 2 + 5 = 7; \quad \text{anche } 3 + 4 = 2 + 5.$$

DISUGUAGLIANZE

Per indicare se un numero è maggiore o minore di un altro si adoperano i seguenti simboli: $>$ e $<$

$9 > 6$ significa che 9 è maggiore di 6

$6 < 9$ significa che 6 è minore di 9

Nota - Il vertice del «triangolo» va sempre posto in direzione del numero inferiore.

INTEGRAZIONI SUI NUMERI NATURALI

Se l'esercizio parla di numeri che «sono compresi» vuol dire che non devo prendere in considerazione i numeri estremi. *Es.*: $1 < n < 4$.

I numeri compresi tra 1 e 4 sono solo 2 e 3; se invece sono «compresi e uguali» prendo in considerazione anche l'estremo o gli estremi con l'uguale. *Es.*: $1 \leq n \leq 4$.

Oltre al 2 e 3 anche il numero 1 va considerato, perché c'è il simbolo \leq (minore od uguale), mentre il 4 non va considerato poiché non c'è il simbolo uguale.

Inoltre va ricordato che: il più piccolo numero naturale di una cifra è 0 e il più grande è 9; il più piccolo di due cifre è 10; il più grande è 99 ecc.

Se l'esercizio mi chiede di calcolare la somma dei primi 20 numeri (il 20 è solo un esempio) il ragionamento che debbo seguire è il seguente:

— se n è *pari* (come nel caso dell'esempio 20) si moltiplica il valore per la sua metà e si aggiunge la metà. Quindi $20 \cdot 10 + 10 = 200 + 10 = 210$.

— se n è *dispari* (es.: 27) si moltiplica la metà di quel valore approssimato per eccesso per il valore stesso.

Nell'esempio $\frac{27}{2} = 13,5$ quindi $14 \cdot 27 = 378$.

3. LE QUATTRO OPERAZIONI

ADDIZIONE E RELATIVE PROPRIETÀ

Addizionare un numero a un altro significa contare di seguito al primo le unità del secondo. Le proprietà dell'addizione sono:

1. *commutativa*: invertendo l'ordine degli addendi la somma non cambia.

$$5 + 2 = 7; \quad 2 + 5 = 7;$$

2. *associativa*: una somma di più addendi non cambia se ad alcuni di essi si sostituisce la loro somma.

$$2 + (3 + 4) + 5 = 14; \quad 2 + 7 + 5 = 14;$$

3. *dissociativa*: una somma di due o più addendi non cambia se a un addendo si sostituiscono altri la cui somma sia uguale all'addendo considerato.

$$2 + 6 + 7 = 15; \quad 2 + 6 + (3 + 4) = 15.$$

I numeri dell'addizione si dicono «*addendi*» ed il risultato si dice «*somma o totale*».

$3 + 5$ (addendi) = 8 (somma o totale). Il segno è + (più).

SOTTRAZIONE E RELATIVA PROPRIETÀ

Sottrarre un numero da un altro significa trovare un terzo numero che sommato al secondo dia il risultato del primo.

$$9 - 7 = 2; \quad 2 + 7 = 9$$

9 si dice minuendo.

7 si dice diminutore o sottraendo.

2 si dice differenza.

Il segno è – (meno).

I numeri 9 e 7 considerati assieme si dicono termini della sottrazione.

La sottrazione ha una sola proprietà:

— *invariantiva*: aggiungendo o togliendo ai due termini di una sottrazione uno stesso numero la differenza non cambia.

$$9 - 7 = 2; \quad (9 + 3) - (7 + 3) = 12 - 10 = 2; \quad (9 - 4) - (7 - 4) = 5 - 3 = 2.$$

MOLTIPLICAZIONE E RELATIVE PROPRIETÀ

Moltiplicare un numero per un altro (maggiore di uno) significa fare la somma di tanti addendi uguali al primo quante sono le unità contenute nel secondo numero.

La moltiplicazione non è altro che una addizione abbreviata.

$$9 \cdot 3 = 27; \quad 9 + 9 + 9 = 27.$$

I numeri 9 e 3 si dicono rispettivamente *moltiplicando* e *moltiplicatore*; se si considerano assieme assumono la denominazione di *fattori*. Il numero 27 di cui all'esempio suindicato, si dice *prodotto*. Il segno \cdot si dice moltiplicando o semplicemente *per*. Le proprietà sono:

1. *commutativa*: invertendo l'ordine dei fattori il prodotto non cambia.

$$6 \cdot 4 = 24; \quad 4 \cdot 6 = 24;$$

2. *associativa*: un prodotto di più fattori non muta se ad alcuni di essi si sostituisce il loro prodotto.

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 24; \quad 2 \cdot (12) = 24;$$

3. *dissociativa*: un prodotto di più fattori non cambia se a uno di essi se ne sostituiscono altri il cui prodotto sia uguale al fattore considerato.

$$3 \cdot (8) \cdot 5 = 120; \quad 3 \cdot (2 \cdot 4) \cdot 5 = 120;$$

4. *distributiva rispetto all'addizione*: il prodotto di una somma per un numero si può eseguire moltiplicando ciascun addendo per quel numero e addizionando i prodotti parziali ottenuti;

$$(2 + 3 + 4) \cdot 5 = (9 \cdot 5) = 45 \\ (2 \cdot 5) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 5) = (10 + 15 + 20) = 45;$$

5. *il prodotto di una differenza* per un numero si può eseguire moltiplicando ciascun termine della differenza per quel numero e sottraendo i prodotti parziali ottenuti.

$$(8 - 2) \cdot 4 = (6 \cdot 4) = 24 \\ (8 \cdot 4) - (2 \cdot 4) = (32 - 8) = 24$$

Nota - Se tra i fattori vi è zero, il prodotto è zero. *Es.*: $2 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 5 = 0$.

DIVISIONE E RELATIVE PROPRIETÀ

Dividere un numero per un altro vuol dire trovare un terzo numero che, moltiplicato per il secondo, e aggiungendo l'eventuale resto, dia per risultato il primo.

$$16 : 2 = 8; \quad 8 \cdot 2 = 16.$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 3} \\ 2 \quad 5 \end{array}$$

17 si dice dividendo

3 si dice divisore

5 si dice quoziente

2 si dice resto.

se il resto è zero il risultato si dice quoto.

Prova: $5 \cdot 3 = 15$; $15 + 2 = 17$.

Le proprietà della divisione sono:

1. *invariantiva*: moltiplicando il dividendo e il divisore per uno stesso numero il quoziente non cambia e il resto, se c'è, risulta moltiplicato per quel numero;

Es.: $27 : 6$ è uguale a 4 con il resto di 3 .

Se moltiplico $27 \cdot 3$, $6 \cdot 3$ e $3 \cdot 3$ ottengo i seguenti numeri: 81 , 18 , e 9 .

Dividendo 81 per 18 , trovo « 4 » come quoziente e « 9 » come resto, cioè $3 \cdot 3$;

2. *distributiva rispetto all'addizione*: per dividere una somma indicata di due o più numeri per un numero dato, si possono dividere — se ciò risulta possibile — tutti gli addendi per quel numero e sommare i quozienti parziali ottenuti.

$$(40 + 25 + 10) = 75; \quad 75 : 5 = 15$$

$$(40 : 5) + (25 : 5) + (10 : 5) = (8 + 5 + 2) = 15;$$

3. *distributiva rispetto alla sottrazione*: per dividere una differenza indicata per un numero dato, si possono dividere - se ciò risulta possibile - diminuendo e sottraendo per quel numero e sottrarre quindi i quozienti parziali ottenuti.

$$(18 - 6) : 3 = 4 \text{ quoziente.}$$

$$(18 : 3) - (6 : 3) = 6 - 2 = 4.$$

4. SISTEMA METRICO DECIMALE

Per misurare una qualsiasi grandezza sono indispensabili delle unità di misura quali il metro lineare, il metro quadrato, il grammo e il litro che sono dette misure principali.

A queste, per maggiore precisione e più facilità di calcolo, si aggiungono misure secondarie, maggiori o minori delle misure principali.

Tutte queste grandezze costituiscono il sistema metrico decimale.

MISURE DI LUNGHEZZA

L'unità fondamentale è il metro che è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre.

Sono *multipli* del metro:

Mm	– miriametro	=	10.000 metri
Km	– chilometro	=	1.000 metri
hm	– ettometro	=	100 metri
dam	– decametro	=	10 metri
<i>m.</i>	– metro	=	1 metro

Sono *sottomultipli* del metro:

dm	– decimetro	=	0,1 metri
cm	– centimetro	=	0,01 metri
mm	– millimetro	=	0,001 metri

Le predette unità di lunghezza procedono di 10 in 10.

Quando si passa a una misura più grande si deve dividere per 10 per ogni ordine; quando si passa ad una misura più piccola occorre moltiplicare per 10 per ogni ordine.

Es.: m 2,8 = hm 0,028 (si sale di due ordini e si sposta la virgola verso sinistra di due posti), oppure si divide per 100 se il numero è intero.

Es.: Km 44,16 = dam 4.416 (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di due posti), oppure si aggiungono due zeri se il numero è intero.

Anche le misure di capacità e di peso procedono di 10 in 10 per ogni ordine.

MISURE DI CAPACITÀ

Sono *multipli* del litro:

hl	– ettolitro	=	100	litri
dal	– decalitro	=	10	litri
<i>l.</i>	– litro	=	1	litro

Sono *sottomultipli* del litro:

dl	– decilitro	=	0,1	litro
cl	– centilitro	=	0,01	litro
ml	– millilitro	=	0,001	litro

$$\text{dl } 428,29 = \text{dal } 4,2829; \quad \text{hl } 0,438 = \text{cl } 4.380$$

MISURE DI PESO

Sono *multipli* del grammo:

t	– tonnellata	= 1.000.000	grammi
q	– quintale	= 100.000	grammi
Mg	– miriagrammo	= 10.000	grammi
Kg	– chilogrammo	= 1.000	grammi
hg	– ettogrammo	= 100	grammi
dag	– decagrammo	= 10	grammi
g	– grammo	= 1	grammo

Sono *sottomultipli* del grammo:

dg	– decigrammo	= 0,1	grammi
cg	– centigrammo	= 0,01	grammi
mg	– milligrammo	= 0,001	grammi

$$q \ 0,04 = dag \ 400; \ cg \ 230,13 = Kg \ 0,0023013.$$

Nota - In pratica si assume come unità di base di chilogrammo.

5. ALTRI SISTEMI DI MISURE

Per le misure di superficie (aree) si usano gli stessi simboli esaminati per le misure di lunghezza; va però tenuto presente che procedono di 100 in 100 per ogni ordine. Si parla pertanto di misure al quadrato.

Es.: $dm^2 \ 8,28 = mm^2 \ 82.800$ (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di quattro posti).

Es.: $m^2 \ 16,392 = dam^2 \ 0,16392$ (si sale di un ordine e si sposta la virgola verso sinistra di due posti).

Per le misure terriere si usano le seguenti misure agrarie che procedono di 100 in 100 per ogni ordine:

ha = ettaro = 10.000 metri quadrati = hm^2

a = ara = 100 metri quadrati = dam^2

ca = centiara = 1 metro quadrato = m^2

L'*ara* è l'unità di misura fondamentale.

Anche per le misure di volume si usano gli stessi simboli delle misure di lunghezza; essi procedono però di 1.000 in 1.000 per ogni ordine. Si parla pertanto di misure cubiche.

Es.: $m^3 \ 0,04 = cm^3 \ 40.000$ (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di sei posti);

Es.: $cm^3 \ 96008,2 = m^3 \ 0,0960082$ (si sale di due ordini e si sposta la virgola verso sinistra di sei posti).

Per la misurazione della paglia, legna da ardere ecc., si adopera, in alcune località, lo *stero* che ha quale multiplo il *decastero* e come sottomultiplo il *decistero*.

Procedono di 10 in 10 per ogni ordine.

das = decastero = 10 metri cubi

s = stero = 1 metro cubo

ds = decistero = 0,1 metro cubo

Es.: das 0,8 = ds 80

6. EQUIVALENZE

Considerato che un litro di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigradi corrisponde a un decimetro cubo e a un chilogrammo, possiamo senz'altro eseguire riduzioni da litri a kg a dm^3 e ai multipli e sottomultipli dell'uno e dell'altro.

Si riportano i seguenti specchietti indicativi, sempre riferiti all'acqua con le caratteristiche su esposte.

Misure di capacità			Misure di estensione			Misure di peso	
m^3	1	=	t	1	=	l	1.000
dm^3	1	=	kg	1	=	l	1
cm^3	1	=	g	1	=	ml	1
l	1	=	dm^3	1	=	kg	1
dal	1	=	dm^3	10	=	kg	10
hl	1	=	dm^3	100	=	kg	100
dl	1	=	cm^3	100	=	g	100
cl	1	=	cm^3	10	=	g	10
ml	1	=	cm^3	1	=	g	1

Es.: m^3 0,69 = hg = hl

Cerchiamo le misure fondamentali (l, kg, dm^3); si ha che m^3 0,69 = dm^3 690 che sono anche il valore in kg e litri.

Ci è quindi facile fare il passaggio da kg 690 a hg 6.900 e da l 690 a hl 6,90.