

## CALCOLO COMBINATORIO

### 1. GENERALITÀ

Il calcolo combinatorio ha come oggetto il calcolo dei modi con i quali possono essere associati, attraverso regole prestabilite, gli elementi di due o più insiemi, o di uno stesso insieme. Nell'applicazione pratica si può porre il problema di conoscere in quanti modi si può presentare un fenomeno; ad esempio si potrebbero porre quesiti dei tipi seguenti:

- a) quante sono le possibili graduatorie che si possono formare da un gruppo di persone partecipanti ad un concorso?
- b) Come può essere la tabella dell'ordine di arrivo di una gara o la classifica delle squadre partecipanti ad un torneo?
- c) In quanti modi si possono scegliere i campioni di una popolazione per un'indagine statistica?

L'elenco potrebbe continuare all'infinito, qui abbiamo voluto solo indicare qualche esempio pratico chiarificatore.

Il problema di conoscere le risposte alle domande del tipo suindicato può sembrare banale, ma quando il numero degli elementi è elevato la difficoltà consiste proprio nel formare tutti i raggruppamenti senza tralasciarne alcuni e senza incombere in ripetizioni.

Tali raggruppamenti possono essere fatti in molti modi; qui ci limiteremo ad esaminare i casi più importanti e più frequenti nelle applicazioni pratiche.

È bene sottolineare subito che, prima di applicare ai casi concreti le formule, si dovranno esaminare con attenzione i dati a disposizione e gli scopi che si prefiggono. Poiché la matematica offre modelli che cercano di interpretare casi reali, occorre capire a quale modello bisogna far riferimento nella applicazione reale che si sta interpretando.

### 2. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Consideriamo un solo insieme di riferimento e formiamo dei raggruppamenti associando tra loro gli elementi dell'insieme stesso.

Esempi:

Dato l'insieme  $A = \{a, b, c, d, e\}$  si vogliono formare tutte le possibili sigle di due elementi presi da  $A$ .

Vediamo quali sono:

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	ce
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

Questi raggruppamenti vengono detti **disposizioni** con ripetizione di 5 elementi di classe 2.

In generale questo tipo di raggruppamento è detto *disposizioni con ripetizione di  $n$  elementi di classe  $K$* , dove il numero  $n$  è il numero di elementi presi in considerazione per fare i raggruppamenti, che non sempre coincidono con tutto l'insieme, e  $K$  è il numero degli elementi che compongono ogni raggruppamento.

Dall'esempio si nota che i raggruppamenti sono  $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ .

Quindi,

$$\boxed{D_{n,k} = n^k} \quad \text{Disposizioni con ripetizione}$$

Ora se, dall'esempio precedente, volessimo eliminare i raggruppamenti nei quali vi sono elementi che si ripetono, otterremmo:

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	ce
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

I raggruppamenti rimasti sono  $20 = 5 \cdot 4$ .

Questi raggruppamenti sono detti **disposizioni semplici** (o senza ripetizione) di  $n$  elementi di classe  $K$ .

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots [n - (K+1)]} \quad \text{Disposizioni semplici (senza ripetizione)}$$

Il numero di queste disposizioni semplici di  $n$  elementi di classe  $k$  è uguale al prodotto di  $k$  fattori interi consecutivi decrescenti a partire da  $n$ .

**Esempio:**

Quante parole di quattro lettere, ripetute o no (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano?

Considerando anche le parole contenenti lettere ripetute si ha:

$$D_{21,4} = 21^4 = 194.481$$

Se invece le lettere non possono essere ripetute, allora si ha

$$D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143.640$$

### 3. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Pensiamo ora ad un insieme di cinque elementi e se volessimo combinare tutti gli elementi tra di loro?

La risposta è semplice: dato un insieme  $A$  di  $n$  elementi, si definiscono *permutazioni di  $n$  elementi (diversi fra loro)*, i raggruppamenti formati dagli  $n$  elementi scelti in ordine qualsiasi.

#### Esempio:

1. Ad un concorso sono stati selezionati tre concorrenti  $A, B, C$ ; calcolare quanti sono i possibili modi nei quali si può presentare la graduatoria finale.

Tutte le graduatorie possibili sono le seguenti:

$$ABC \quad ACB \quad BAC \quad BCA \quad CAB \quad CBA$$

queste sono  $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3$

“La permutazione non è altro che una disposizione nella quale  $n = k$ ”.

Quindi il numero delle permutazioni di  $n$  elementi è:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ (leggasi } n \text{ fattoriale)}$$

Il nostro  $n$  fattoriale, come avrete capito, non è altro che il prodotto dei primi  $n$  numeri naturali, ad esempio  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Quindi possiamo affermare che

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Vediamone un esempio:  $5! = 5 \cdot 4!$ , è vero in quanto  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Noi sappiamo che le permutazioni sono senza ripetizioni, ma vi è un caso in cui vi sono elementi ripetuti, cioè se nell'insieme di riferimento ci sono *ripetizioni*.

Ad esempio se l'insieme è la parola “MAMMA”, e vogliamo sapere in quanti modi si può anagrammare, dovremmo tener conto del fatto che ci sono tre M e due A.

In generale se dato un insieme di  $n$  elementi dei quali  $\alpha$  sono eguali fra loro, e  $\beta$  sono eguali fra loro, ecc., il numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti che si possono ottenere risulta:

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots)} = \frac{n!}{(\alpha! \beta! \dots)} \quad \text{Permutazioni con ripetizioni}$$

Quindi nel nostro esempio i possibili anagrammi della parola “MAMMA” sono:

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Non è detto che gli elementi che si ripetono debbano essere obbligatoriamente due o più ( $\alpha, \beta, \dots$ , ecc. ...), può essere anche uno solo.

**Esempio:**

Anagrammando la parola “GIORNO” avremmo  $P_6^{(2)} = \frac{6!}{2!} = 360$ , perché la “O” si ripete due volte.

#### 4. COMBINAZIONI SEMPLICI

Dato un insieme  $B$  di  $n$  elementi, si definiscono **combinazioni semplici** degli  $n$  elementi di classe  $k$ , i raggruppamenti di  $k$  elementi, scelti fra gli  $n$  dell'insieme  $B$ , tali che ogni raggruppamento differisca dagli altri per la natura degli elementi e non per l'ordine.

Facciamo un esempio:

Dato l'insieme  $B = \{a, b, c, d\}$ , calcoliamo le combinazioni semplici di 4 elementi di classe 2:

ab      ac      ad      bc      bd      cd

Ora se da questo insieme volessimo determinare anche le disposizioni semplici di  $n$  elementi di classe  $k$ , otterremmo:

ab      ac      ad      queste sono 12, cioè  $4 \cdot 3$   
 ba      bc      bd  
 ca      cb      cd  
 da      db      dc

Notiamo che le combinazioni erano  $6 = 12/2$ , cioè le  $C_{n,k} = D_{n,k}/P_k$  quindi più in generale si ha:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} \quad \text{Combinazioni}$$

Solitamente si indica:  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$  (leggasi  $n$  su  $k$ ).

Il simbolo  $\binom{n}{k}$  è detto *coefficiente binominale*, per il suo uso nello sviluppo delle potenze del binomio.

**Esempio:**

Calcolare quante cinque si possono estrarre da un'urna contenente i 90 numeri del lotto.

Le cinque sono tante quante sono le combinazioni di 90 elementi di classe 5, cioè:

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43.949.268$$

**5. COEFFICIENTI BINOMINALI E PROPRIETÀ**

La formula dei coefficienti binominali si può esprimere per mezzo dei fattoriali, nel seguente modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{D_{nk}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Questi coefficienti binominali godono delle seguenti proprietà:

a) Proprietà *simmetrica*, cioè  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  pertanto si ha:

$$\binom{n}{n} = \binom{n!}{n!} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

b) Formula di *ricorrenza*:  $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$

c) Proprietà di *Stifel*:  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

In pratica le tre proprietà andrebbero dimostrate, ma è nostra opinione che la comprensione dell'argomento non dipenda dalle tre dimostrazioni; a tal fine abbiamo preferito non "annoiare" il lettore!

## CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

### 1. EVENTI CERTI, IMPOSSIBILI E CASUALI

La probabilità è la teoria che tratta i risultati possibili di un esperimento. In una prova **la probabilità del verificarsi di un evento E** è data dal rapporto fra il numero  $n(E)$  dei casi favorevoli all'evento ed il numero  $n$  dei casi favorevoli e sfavorevoli (totali). Esprimendo il concetto in simboli si avrà:

$$p(E) = n(E)/n, \text{ perché tutti i casi siano equiprobabili.}$$

Per esempio la probabilità che lanciando una volta un dado non truccato si abbia il numero 4 è  $1/6 = 0,16$  in quanto solo una faccia su sei ha stampato il numero 4.

**Es.:** Qual è la probabilità in un mazzo di carte di scegliere un otto? Poiché gli otto sono sempre 4 e le carte in totale sono 40 la probabilità sarà  $4/40 = 0,1$ .

Va ricordato che la probabilità è sempre compresa fra 0 e 1 ( $0 \leq P \leq 1$ ), dove  $P = 0$  quando l'evento è **impossibile** e  $P = 1$  quando l'evento è **certo**.

### 2. REGOLA DELLA SOMMA

Due eventi si definiscono **incompatibili** (o dipendenti) se il verificarsi di uno automaticamente esclude il verificarsi dell'altro.

Dati due eventi incompatibili o mutuamente escludentisi  $E_1$  e  $E_2$ , aventi rispettivamente probabilità  $P(E_1)$  e  $P(E_2)$  di presentarsi, la probabilità di presentarsi dell'uno o dell'altro in una prova è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

**Es.:** Vogliamo determinare la probabilità che da un mazzo di carte si estragga un asso o una carta di spade. I casi favorevoli sono costituiti da 4 assi e dalle 10 spade meno l'asso di spade in quanto già considerato con gli assi, i casi possibili sono 40.

Quindi si ha:

$$P(A \text{ o } B) = (4 + 10 - 1)/40 = 4/40 + 10/40 - 1/40.$$

In questo caso l'asso di spade è un elemento di compatibilità e va sottratto alla somma dei due eventi:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

### 3. REGOLA DEL PRODOTTO

Due eventi si definiscono **compatibili** (o **indipendenti**) se il verificarsi di uno non esclude il verificarsi dell'altro.

#### CASO DEL CAMPIONAMENTO CON REIMMISSIONE

Dati due eventi compatibili ed indipendenti  $E_1$  ed  $E_2$ , la probabilità del presentarsi dell'uno e dell'altro (simultanei o successivi) in una prova è data da:

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Es.: In due lanci successivi di un dado, la probabilità di avere 3 e poi 4 è data da

$$P(3 \text{ e } 4) = P(3) \cdot P(4) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 = 0,027.$$

#### CASO DEL CAMPIONAMENTO SENZA REIMMISSIONE

In un'urna vi sono 6 palline bianche, 4 rosse e 2 nere; vengono estratte a caso due palline senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna; la seconda estrazione ha una diversa composizione, infatti contiene una pallina bianca e una rossa.

I casi favorevoli sono rappresentati dalle coppie che si possono formare con le 6 palline bianche e le 4 rosse:  $6 \cdot 4$ ; i casi possibili delle coppie che si possono formare con le 12 palline presenti nell'urna alla prima estrazione e le 11 che rimangono disponibili alla seconda.

$$6/12 \cdot 4/11 = P(B) \cdot P(R/B)$$

In questo caso, dunque, la probabilità di avere A e B è data dalla probabilità di A per la probabilità di B, una volta che l'evento A si sia già verificato:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

*QUESITI DI VERIFICA*

1) Un'urna contiene 15 palline bianche, 5 nere, e 10 rosse. Determinare la probabilità che, dopo aver mescolato bene, estraendo una pallina a caso essa sia bianca o nera.

A)  $\frac{20}{30}$

B)  $\frac{10}{30}$

C)  $\frac{20}{10}$

D)  $\frac{10}{20}$

2) In un casinò il croupier lancia un dado regolare, che probabilità ha il giocatore che gli esca un numero pari?

A) 0,5

B) 0,25

C) 0,33

D) 1

3) Il sig. Bianchi estraendo una carta da un mazzo di 52 carte ben mescolato, che possibilità ha di trovare l'asso di cuori o una carta di picche oppure un re di fiori?

A) 0,44

B) 0,28846

C) 0,25

D) 0,12

4) Che possibilità ha un pokerista di ricevere in una mano di 5 carte soltanto carte di quadri (colore)?

A) 0,096154

B) 0,000977

C) 0,25

D) 0,151723

5) Qual è la probabilità di fare 6 al Superenalotto?

A)  $\frac{6}{90}$

B)  $\left(\frac{6}{90}\right)^6$

C)  $\left(\frac{1}{90}\right)^6$

D)  $\frac{1}{622.614.630}$

6) Qual è la probabilità che, lanciando un dado e di seguito una moneta, si ottenga “quattro” dal dado e “testa” dalla moneta?

A)  $\frac{1}{6}$

B)  $\frac{1}{12}$

C)  $\frac{1}{2}$

D)  $\frac{1}{36}$

7) Se si lancia 3 volte un dado, la probabilità di ottenere per tre volte il numero 4 è:

A)  $\frac{1}{216}$

B)  $\frac{1}{18}$

C)  $\frac{3}{36}$

D)  $\frac{1}{3}$

8) Lanciando due dadi, la probabilità che la somma delle facce sia uguale a 2 è:

A) 1

B)  $\frac{1}{18}$

C)  $\frac{1}{36}$

D)  $\frac{1}{2}$

## RISPOSTE COMMENTATE

### 1) Risposta esatta: A

Se  $P_1$  è la probabilità di estrarre una pallina bianca e  $P_2$  è la probabilità di estrarre una pallina nera abbiamo che  $P_1 = \frac{15}{30}$  e  $P_2 = \frac{5}{30}$ . Essendo i due eventi "estrazione di una pallina di colore nero e bianco", incompatibili (indipendenti) la probabilità totale è la somma cioè  $\frac{20}{30}$ .

### 2) Risposta esatta: A

I numeri pari sono 3, le possibilità sono 6 quindi la probabilità  $P = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ .

### 3) Risposta esatta: B

Se indichiamo con  $P_1$  la probabilità di estrarre un asso di cuori, con  $P_2$  la probabilità di estrarre una carta di picche e con  $P_3$  la probabilità di estrarre un re di fiori, esse saranno pari rispettivamente a:  $P_1 = \frac{1}{52}$ ,  $P_2 = \frac{13}{52}$  e  $P_3 = \frac{1}{52}$ . Essendo gli eventi incompatibili, la probabilità totale sarà la somma delle singole probabilità, quindi:

$$P_{\text{tot}} = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{15}{52} = 0,28846.$$

### 4) Risposta esatta: B

Indichiamo rispettivamente con  $P_1$  la probabilità che la prima carta sia quadri, con  $P_2$  la probabilità che la seconda carta sia quadri, e così via fino a  $P_5$ . Queste probabilità saranno pari a:

$$P_1 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ (al primo giro esce la prima carta di quadri)}$$

$$P_2 = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \text{ (al secondo giro esce la seconda carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 12 carte di quadri residue su 48 carte residue)}$$

$$P_3 = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \text{ (al terzo giro esce la terza carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 11 carte di quadri residue su 44 carte residue)}$$

$P_4 = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$  (al quarto giro esce la quarta carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 10 carte di quadri residue su 40 carte residue)

$P_5 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  (al terzo giro esce la quinta carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 9 carte di quadri residue su 36 carte residue)

Essendo gli eventi compatibili la probabilità totale è data dal prodotto delle probabilità parziali quindi:

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024} = 0,000977.$$

### 5) Risposta esatta: D

Se si gioca una sestina prima di tutto bisogna considerare le sestine possibili non ordinate che si possono costruire con 90 numeri. Tale valore è dato da  $\frac{90}{6} = 622.614.630$ .

Poiché la sestina vincente è unica, la possibilità è  $\frac{1}{622.614.630}$ .

### 6) Risposta esatta: B

La probabilità che si ottiene 4 è  $\frac{1}{6}$  che si moltiplica per  $\frac{1}{2}$ , che è la probabilità di ottenere testa.

### 7) Risposta esatta: A

La probabilità di ottenere 4 è  $\frac{1}{6}$  che si moltiplica per tre volte.

### 8) Risposta esatta: C

2 si può ottenere solo con uno più uno nel primo lancio ( $\frac{1}{36}$  casi possibili) più uno più nel secondo ( $\frac{1}{36}$  casi possibili).

*QUESITI DI VERIFICA*

1) Un'urna contiene 15 palline bianche, 5 nere, e 10 rosse. Determinare la probabilità che, dopo aver mescolato bene, estraendo una pallina a caso essa sia bianca o nera.

A)  $\frac{20}{30}$

B)  $\frac{10}{30}$

C)  $\frac{20}{10}$

D)  $\frac{10}{20}$

2) In un casinò il croupier lancia un dado regolare, che probabilità ha il giocatore che gli esca un numero pari?

A) 0,5

B) 0,25

C) 0,33

D) 1

3) Il sig. Bianchi estraendo una carta da un mazzo di 52 carte ben mescolato, che possibilità ha di trovare l'asso di cuori o una carta di picche oppure un re di fiori?

A) 0,44

B) 0,28846

C) 0,25

D) 0,12

4) Che possibilità ha un pokerista di ricevere in una mano di 5 carte soltanto carte di quadri (colore)?

A) 0,096154

B) 0,000977

C) 0,25

D) 0,151723

5) Qual è la probabilità di fare 6 al Superenalotto?

A)  $\frac{6}{90}$

B)  $\left(\frac{6}{90}\right)^6$

C)  $\left(\frac{1}{90}\right)^6$

D)  $\frac{1}{622.614.630}$

6) Qual è la probabilità che, lanciando un dado e di seguito una moneta, si ottenga “quattro” dal dado e “testa” dalla moneta?

A)  $\frac{1}{6}$

B)  $\frac{1}{12}$

C)  $\frac{1}{2}$

D)  $\frac{1}{36}$

7) Se si lancia 3 volte un dado, la probabilità di ottenere per tre volte il numero 4 è:

A)  $\frac{1}{216}$

B)  $\frac{1}{18}$

C)  $\frac{3}{36}$

D)  $\frac{1}{3}$

8) Lanciando due dadi, la probabilità che la somma delle facce sia uguale a 2 è:

A) 1

B)  $\frac{1}{18}$

C)  $\frac{1}{36}$

D)  $\frac{1}{2}$

## RISPOSTE COMMENTATE

### 1) Risposta esatta: A

Se  $P_1$  è la probabilità di estrarre una pallina bianca e  $P_2$  è la probabilità di estrarre una pallina nera abbiamo che  $P_1 = \frac{15}{30}$  e  $P_2 = \frac{5}{30}$ . Essendo i due eventi "estrazione di una pallina di colore nero e bianco", incompatibili (indipendenti) la probabilità totale è la somma cioè  $\frac{20}{30}$ .

### 2) Risposta esatta: A

I numeri pari sono 3, le possibilità sono 6 quindi la probabilità  $P = \frac{3}{6} = \frac{5}{10}$ .

### 3) Risposta esatta: B

Se indichiamo con  $P_1$  la probabilità di estrarre un asso di cuori, con  $P_2$  la probabilità di estrarre una carta di picche e con  $P_3$  la probabilità di estrarre un re di fiori, esse saranno pari rispettivamente a:  $P_1 = \frac{1}{52}$ ,  $P_2 = \frac{13}{52}$  e  $P_3 = \frac{1}{52}$ . Essendo gli eventi incompatibili, la probabilità totale sarà la somma delle singole probabilità, quindi:

$$P_{\text{tot}} = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{15}{52} = 0,28846.$$

### 4) Risposta esatta: B

Indichiamo rispettivamente con  $P_1$  la probabilità che la prima carta sia quadri, con  $P_2$  la probabilità che la seconda carta sia quadri, e così via fino a  $P_5$ . Queste probabilità saranno pari a:

$$P_1 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ (al primo giro esce la prima carta di quadri)}$$

$$P_2 = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \text{ (al secondo giro esce la seconda carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 12 carte di quadri residue su 48 carte residue)}$$

$$P_3 = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \text{ (al terzo giro esce la terza carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 11 carte di quadri residue su 44 carte residue)}$$

$P_4 = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$  (al quarto giro esce la quarta carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 10 carte di quadri residue su 40 carte residue)

$P_5 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  (al terzo giro esce la quinta carta di quadri, chiaramente gli eventi favorevoli sono 9 carte di quadri residue su 36 carte residue)

Essendo gli eventi compatibili la probabilità totale è data dal prodotto delle probabilità parziali quindi:

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024} = 0,000977.$$

### 5) Risposta esatta: D

Se si gioca una sestina prima di tutto bisogna considerare le sestine possibili non ordinate che si possono costruire con 90 numeri. Tale valore è dato da  $\frac{90}{6} = 622.614.630$ .

Poiché la sestina vincente è unica, la possibilità è  $\frac{1}{622.614.630}$ .

### 6) Risposta esatta: B

La probabilità che si ottiene 4 è  $\frac{1}{6}$  che si moltiplica per  $\frac{1}{2}$ , che è la probabilità di ottenere testa.

### 7) Risposta esatta: A

La probabilità di ottenere 4 è  $\frac{1}{6}$  che si moltiplica per tre volte.

### 8) Risposta esatta: C

2 si può ottenere solo con uno più uno nel primo lancio ( $\frac{1}{36}$  casi possibili) più uno più nel secondo ( $\frac{1}{36}$  casi possibili).