

STORIA

PREMESSA

In quasi tutti i concorsi nelle Forze Armate o nelle Forze di Polizia, nelle prove scritte di selezione culturale, una delle materie oggetto d'esame è la storia. Pertanto tra i vari quesiti somministrati di matematica, educazione civica, ecc. troviamo quelli dell'argomento in esame.

I candidati si chiedono quasi sempre al momento dell'inizio della preparazione il tipo di domande che si incontreranno e su cosa si dovranno soffermare durante lo studio.

Innanzitutto è utile sapere che la maggior parte dei quesiti riguardano la Storia Contemporanea, dalla Rivoluzione industriale o dalla Restaurazione ai giorni nostri, solamente qualche domanda potrà interessare periodi storici più remoti; proprio per tale motivo il presente volume ha inteso sviluppare maggiormente l'ultimo periodo storico che va dalla Rivoluzione Francese alla guerra americana con l'Iraq, mentre per i periodi precedenti vengono solamente forniti dei cenni su argomenti e accadimenti ritenuti più rilevanti.

Per quanto riguarda lo studio, proprio perché la selezione non è una prova orale, ma una prova a test, esso non deve essere mirato all'approfondimento o alla comprensione dei fenomeni storici, bensì ad aspetti più nozionistici quali, ad esempio:

- avvenimenti e date: trattati di pace, guerre, battaglie, Convenzioni, ecc.
- periodi storici: accadimenti particolari, scoperte, curiosità
- personaggi storici: incarichi, periodo e apporto storico, ecc.

Le domande, infatti che ricorrono spesso sono così formulate:

- Qual è il trattato che ha sancito la pace tra...
- In quale anno lo Stato... ha dichiarato guerra...
- In quale battaglia quel... ha subito la sconfitta...
- Che incarico ha ricoperto...
- Chi ha rappresentato l'Italia nella conferenza...
- Tra chi fu combattuta la guerra...

In base ai suggerimenti forniti e agli esempi riportati si può adesso iniziare la preparazione.

1. CENNI STORICI: DALLA PREISTORIA AL CONGRESSO DI VIENNA

ETÀ PREISTORICA; LE ERE GEOLOGICHE. La più antica era geologica della Terra fu l'*era archeozoica*, con climi glaciali e desertici, che risale a circa 5 miliardi di anni fa.

L'**era paleozoica** ebbe origine circa 600.000.000 di anni or sono; in questo periodo comparvero piante, scorpioni, pesci e anfibi.

L'**era mesozoica** (225.000.000 di anni fa) vide il grande sviluppo dei rettili.

L'**era cenozoica** fu quella nella quale si diffusero i mammiferi; in Europa comparvero i Primati e le scimmie.

L'**era quaternaria** (o neozoico), l'ultima della Terra, vide la comparsa dell'uomo (chiamato *Homo habilis*): a tre milioni di anni fa risale il fossile rinvenuto in Etiopia; 1,5 milioni di anni fa (paleolitico inferiore) comparve l'*Homo erectus* (che usò il fuoco) cui fece seguito l'*Homo di Neandertal* circa 100.000 anni fa (periodo del paleolitico medio). Infine 40.000 anni fa comparve l'*Homo sapiens*.

Nel periodo del mesolitico iniziò la diffusione della cultura della ceramica (in Giappone), la lavorazione dei cereali e in Nuova Guinea emersero indizi di orticoltura.

Il neolitico (età della pietra nuova) fu caratterizzato dall'uso della pietra levigata e dalla costruzione di villaggi di capanne; sorsero civiltà organizzate e i primi centri abitati.

La regione asiatica del Vicino Oriente (Medio Oriente) fu teatro di due eventi storici che modificarono la vita degli uomini:

- a) la nascita dell'agricoltura;
- b) il sorgere dei primi villaggi.

Ciò avvenne nelle zone pianeggianti dei fiumi Tigri ed Eufrate. Nacquero le prime società urbane e fu inventata la scrittura (circa 3.500 anni a.C.).

Sorsero i primi imperi: gli Ittiti si stabilirono in Anatolia (1850 a.C.), gli Assiri in Mesopotamia e i Persiani in Iran (539 a.C.).

L'EGITTO. Nel 3000 a.C. nacque la prima dinastia dell'antico Egitto. Il periodo di splendore di questa civiltà (che durò 3000 anni) si ebbe grazie ad una efficiente amministrazione dello Stato e una rigida divisione in classi.

L'Egitto fu sconfitto dai Persiani di Cambise e divenne provincia dell'Impero Persiano.

La società egizia aveva una struttura di tipo piramidale. Il potere era dei "*faraoni*", ai quali erano affidati il controllo e la direzione dell'economia del Paese. Subito sotto il faraone v'era il *visir* (primo ministro), seguito dai *governatori provinciali*. Esistevano tre classi sociali:

- i *sacerdoti* che erano responsabili della coltivazione delle terre di proprietà del faraone;
- gli *scribi*, ai quali era affidata la scrittura;
- i *militari*, che erano molto importanti durante il periodo faraonico.

A un livello inferiore stavano i mercanti, gli artigiani e i contadini. All'ultimo livello si trovavano gli schiavi.

La scrittura egizia (geroglifica) comprendeva centinaia di segni, detti **ideogrammi** indicanti oggetti o persone.

Gli Egiziani adoravano un gran numero di divinità (religione politeistica): *Anubi* (dio dei morti); *Apis* (dio del Nilo); *Soben* (dio dei mali).

Vi era poi il culto del Sole, di *Osiride* (dio della vegetazione) e del Faraone.

I POPOLI DELLA MESOPOTAMIA. La Mesopotamia era una terra compresa tra i fiumi Tigri ed Eufrate, pianeggiante e florida, che non aveva barriere naturali. Per questo fu invasa da molte popolazioni che diedero vita a importanti civiltà; le principali furono quelle dei *Sumeri*, degli *Assiri* e dei *Babilonesi*.

I SUMERI. Dovettero lottare a lungo per placare le inondazioni dei fiumi Tigri ed Eufrate che spesso erano soggetti a piene violente. Costruirono allora una rete di canali per irrigare i campi. Anche i Sumeri erano politeisti; adoravano il dio dell'uragano, la dea della guerra, il dio del cielo ecc. Provarono a misurare il tempo e a fare i calcoli. Elaborarono inoltre la prima forma di scrittura non basata sui disegni (*cuneiforme*).

I BABILONESI. Nel secondo millennio i Babilonesi sottomisero i Sumeri. I Babilonesi vengono ricordati per un importante documento: la stele di Hammurabi in cui è incisa una raccolta di 282 leggi: il **codice di Hammurabi**. La loro società era divisa in tre classi: gli uomini liberi, i subalterni e gli schiavi.

GLI ASSIRI. Quando conquistarono la Mesopotamia, stabilirono la capitale a Ninive. Erano violenti e crudeli contro i nemici e tutti coloro che provavano a ribellarsi.

Il loro re **Assurbanipal** raccolse circa 20.000 tavolette di argilla con testi di argomenti vari; fu il primo esempio di biblioteca.

GLI EBREI. Erano un popolo di pastori nomadi che si distinsero per la loro religione monoteistica: credevano in un unico dio: *Jahvè*.

Inoltre non si dividevano per classi sociali; seguivano la legge divina e si consideravano tutti uguali. Il loro libro sacro è la **Bibbia**.

Intorno al 1700 a.C. a causa di una carestia gli Ebrei emigrarono in Egitto e vi rimasero fino al 1250 a.C. quando il capo della tribù, Mosé, li guidò verso la terra Promessa, la Palestina. Il re Davide stabilì la capitale a Gerusalemme, distrutta nel 70 d.C. dai Romani conquistatori.

I POPOLI DEL MEDITERRANEO. I FENICI. Si dedicarono alla pesca e al commercio. Si specializzarono nella produzione di stoffe dipinte di porpora e nella lavorazione del metallo prezioso e del vetro. Fondarono lungo la costa alcune città-stato, ognuna delle quali era governata da un re. Intorno al 1100 a.C. i Fenici estesero i loro confini, si stabilirono lungo le isole del Mediterraneo, dove sorsero delle colonie; la più importante fu Cartagine, sulla costa dell'Africa. Impararono la scrittura geroglifica e cuneiforme, ma inventarono un alfabeto più semplice con 22 caratteri (**alfabeto**).

CRETESI. Furono detti i dominatori del Mediterraneo. La loro civiltà prosperò nel periodo Minoico, chiamato così per il mito del re *Minosse*. Minosse fece costruire un labirinto nel palazzo di Cnosso per tenervi chiuso il Minotauro, un terribile mostro mezzo uomo e mezzo toro, al quale ogni anno la città di Atene doveva offrire sette giovani donne e sette giovani uomini come tributo per una sconfitta subita. Fu Tesèo a liberare Atene da quella terribile situazione, riuscendo ad entrare nel labirinto e ad uccidere il Minotauro.

Il periodo minoico si divide in tre periodi: MINOICO ANTICO 3000-2000 a.C., MINOICO MEDIO 2000-1700 a.C., MINOICO RECENTE 1700-1400 a.C.

È importante lo sviluppo della **scrittura lineare A** caratterizzata da 85 segni però non ancora decifrati.

CIVILTÀ MICENEA. La civiltà micenea prosperò dal 1500 al 900 a.C.

Gli Acheo-Micenei, che rappresentarono la civiltà greca, diedero vita ad un movimento espansionistico tra il XIII e il XII secolo a.C. fino all'Asia Minore, alla Siria e alla Tracia, che si concluse con la guerra di Troia. Nel 1100 a.C. furono assediati dai Dori (popolo di Sparta).

Tipiche della civiltà greca furono le **Polis** o **Città-Stato**. Gli abitanti di Atene furono gli Ioni.

La civiltà Greca si suddivide in diversi periodi:

- Medioevo ellenico (XIII - IX sec.)
- Periodo arcaico (dall'800 al 500 a.C.)
- Periodo classico (dal V al IV sec. a.C.)
- Periodo ellenistico (da Alessandro Magno alla conquista romana del bacino orientale del Mediterraneo)
- Periodo romano (dalla battaglia di Azio al tramonto dell'impero romano).

GUERRE PERSIANE. Un altro popolo di nomadi si insediò, durante l'età del ferro, in una zona corrispondente all'odierno Iran. Erano i Persiani e raggiunsero la massima espansione durante il V sec. a.C. con il loro re Dario.

Contro il *re persiano Dario* insorgono le colonie greche sotto la guida di Mileto, la maggiore città ionica. Nel 494 a.C. i persiani reagiscono e distruggono Mileto.

1° guerra persiana 492 a.C.: Mardonio, mandato da Dario, sottomette la Grecia.

2° guerra persiana 490 a.C.: I generali Dati e Artafarne volgono alla conquista delle isole greche. **Battaglia di Maratona** e vittoria dei greci

3° guerra persiana 480 a.C.: Dario muore e al trono della Persia sale Serse. Temistocle guida gli Ateniesi. *Battaglia di Salamina*, Serse fugge.

4° guerra persiana 479 a.C.: *Battaglia di Platea e Micale*, vittoria dei greci.

Pericle guida Atene verso lo splendore (445-431 a.C.).

Con la *Pace di Callia* (449 a.C.) finiscono le ostilità fra greci e persiani.

Nel 446 a.C. fu firmata la tregua di trent'anni tra Atene e Sparta, ma la guerra riprese solo dopo 13 anni verso il 430 a.C.

Il 429 a.C. viene ricordato per la peste ad Atene e per la morte di Pericle.

Nel 421 a.C. si conclude la *guerra nel Peloponneso* (431/401) con la pace di Nicia. Al trono di Atene subentra Alcibiade. Il 431 a.C. è l'anno della disfatta degli ateniesi.

Il 404 a.C. segna la decadenza dell'impero persiano con la morte di Dario II.

Nel 378 riprendono le ostilità tra Sparta e Atene che saranno causa dell'isolamento della civiltà greca, preda, da adesso, dei macedoni.

MACEDONIA. Fu governata da Filippo II dal 359 al 336 a.C.

Nel **Congresso di Corinto** Filippo II e le altre città elleniche organizzarono una spedizione contro l'impero persiano al fine di risolleverare il mondo ellenico.

Filippo II viene assassinato nel 336 e sostituito dal figlio, **Alessandro Magno** (336-323 a.C.), che condusse la lotta contro l'impero persiano fino a conquistare Siria, Fenicia ed Egitto. Qui fondò la città che prese il suo nome: Alessandria d'Egitto. Definitivamente sconfitto l'impero persiano, nacque quello di Alessandro Magno: un unico impero che comprendeva sia il popolo greco, sia quello persiano. Alessandro apportò grandissime innovazioni: pari trattamento tra vinti e vincitori, rispetto delle culture dei popoli vinti. Nacque un impero con caratteristiche greche, persiane e macedoni. Si realizzò l'unione tra Oriente e Occidente. Fiorì la cultura (scienze, astronomia, medicina e tecnica), migliorò il commercio, la rete stradale e il tenore di vita.

STORIA ROMANA. La storia antica dell'Italia ebbe inizio tra l'VIII e il VII sec. a.C. e la civiltà che si distinse in quel periodo fu quella del popolo etrusco. Non ci sono dati certi sulle origini di questo popolo. Sicuramente gli *Etruschi* estesero rapidamente il loro dominio in tutta l'Italia, ma a causa dei continui contrasti interni, non riuscirono a mantenere a lungo le loro colonie. Agli Etruschi si sovrapposero i *Latini*, soprattutto quelli del Lazio che si insediarono in villaggi intorno al Tevere. Il più importante villaggio fu quello di *Albalonga* che acquistò subito il predominio sugli altri. Successivamente i Latini si trasferirono ai piedi del *colle Palatino* dove poi nacque Roma. Questa città, secondo la tradizione, venne fondata il 21 aprile del 753 a.C. e per i primi due secoli fu governata da sette re: **Romolo**, a cui si deve la fondazione, **Numa Pompilio**, **Tullio Ostilio**, **Anco Marzio**, **Lucio Tarquinio** (detto anche Tarquinio Prisco), **Servio Tullio** e **Tarquinio il Superbo**. Quest'ultimo fu costretto ad abbandonare Roma nel 510 a.C. Da quel momento in poi ebbe inizio *l'età repubblicana*.

Durante la monarchia il re, eletto dalle Curie, era a capo sia dello Stato che della religione. Egli emanava le leggi su consiglio delle "assemblee degli anziani", che formavano il Senato, dei *comizi curiati*, che costituivano l'assemblea popolare, e dei *comizi centuriati* di cui facevano parte i militari. La popolazione di Roma era suddivisa in nobili o patrizi, plebei che rappresentavano tutta la massa, clienti o nullatenenti e schiavi. Durante la repubblica la nuova costituzione

prevedeva tre organi preposti a reggere lo Stato: le *magistrature* (di cui facevano parte i consoli, i censori, i pretori e i questori), i comizi ed il *senato*.

Intorno al V sec. i romani diedero inizio ad una intensa politica espansionistica. Infatti, dopo 10 anni di assedio, riuscirono a espugnare la città di *Veio*, roccaforte del popolo etrusco, sottomettendo via via tutti i popoli italici. Ma i pericoli venivano soprattutto dal nord, a causa della temibile avanzata dei *Celti* e dei *Galli* provenienti dall'attuale Francia. Lo scontro, infatti, fu inevitabile e durissimo e si concluse con l'improvvisa ritirata dei nemici.

Alle guerre galliche seguirono quelle sannitiche, in tutto tre, con le quali Roma riuscì a sottomettere la Campania toccando anche le terre della Magna Grecia. L'avanzata dei romani verso le terre meridionali d'Italia causò l'intervento di **Pirro**, *re dell'Epiro*, chiamato a difendere la città di Taranto. Egli sbarcò in Italia, intorno al 280 a.C., portandosi degli elefanti, animali fino a quel momento sconosciuti al popolo romano. Lo scontro decisivo avvenne nel 275 a.C. a *Maleventum*, città che, dopo la vittoria su Pirro, venne ribattezzata dai romani Beneventum.

Nel III sec. a.C. Roma si affacciò nel Mediterraneo alla ricerca di nuove terre. Questa espansione però andò subito a toccare gli interessi di **Cartagine**, città dell'Africa settentrionale, fondata dai Fenici, che vantava il più alto livello di civiltà e di organizzazione economico-sociale del periodo.

Le *ostilità tra romani e cartaginesi* si protrassero per molto tempo. Solo la **prima guerra punica** durò ben 23 anni (264-241 a.C.) e si concluse con la vittoria di Roma. Successivamente il comando dell'esercito cartaginese venne assunto dal militare **Annibale** che, guidato da un progetto di espansione, andò alla conquista di nuove terre. L'occupazione di Sagunto, città alleata a Roma, provocò la **seconda guerra punica** 218-201 a.C. La mobilità dell'esercito cartaginese e le grandi capacità strategiche di Annibale presero alla sprovvista i romani che, inaspettatamente, vennero attaccati dalle Alpi. Infatti Annibale riuscì ad attraversare i monti con degli elefanti ed invase l'Italia riportando una grande vittoria a *Canne* (216 a.C.). I romani, sconfitti, riaprirono subito le ostilità e a combattere Annibale fu mandato **Scipione l'Africano**. Questi riuscì a sconfiggere il nemico nel 202 a.C. a *Zama*. L'ultimo scontro tra Roma e Cartagine si ebbe con la **terza guerra punica** (149-146 a.C.) conclusasi con la *distruzione di Cartagine* ad opera di **Scipione l'Emiliano**.

La potenza di Roma ormai non cessava di espandersi neppure in Occidente, ma le vaste estensioni territoriali furono causa di profondi rivolgimenti politici e sociali. **Tiberio Gracco**, eletto Tribuno intorno al I secolo, cercò di risollevarle le sorti romane attuando delle riforme sia interne che esterne. Egli suscitò ovunque simpatie ma, accusato di aspirare ad un potere assoluto venne ucciso dai suoi avversari durante un'assemblea del Senato. La sua opera fu in parte continuata dal fratello **Caio Gracco** (eletto nel 123 a.C.), ma con la morte di questi la Repubblica Romana precipitò in minacciosi tumulti. Il comando delle operazioni venne così affidato al console **Caio Mario**, coadiuvato dal suo luogotenente **Silla**. I due combatteranno assieme per molto tempo, ma Silla, deciso ad avere la supremazia mosse guerra contro i veterani di Mario, disseminando stragi ovunque. Uccise lo stesso Mario e intorno all'83 a.C. assunse le vesti di dittatore. A partire dal 79 a.C. a Roma si fece uso di tutti i mezzi, sia leciti che illeciti, per compiere la scalata al potere: fu la *crisi delle istituzioni repubblicane*.

Intanto, cominciava ad acquistare grande autorità un giovane patrizio, **Giulio Cesare**, che iniziò la sua ascesa alla vita pubblica accordandosi con uno dei più valorosi sostenitori di Silla, il console **Pompeo**. Entrambi, insieme con **Crasso**, costituirono il **primo triumvirato** romano (60-53 a.C.), grazie al quale ognuno di loro ottenne favori e appoggi da parte del Senato. Naturalmente molti erano i nemici del senato e dei triumviri, infatti si congiurava contro di essi. Una famosa *congiura* fu quella di *Catilina* (63 a.C.) sventata da Cicerone; tuttavia, anche lo stesso Cicerone congiurò, a sue spese, contro il senato. L'espansione romana provocava ormai insurrezioni ovunque da parte dei paesi confinanti, cosicché, per sedare le guerriglie, Cesare andò a combattere contro la Gallia e Pompeo contro la Spagna. Tra i due comandanti fu Cesare ad

acquistare maggiore autorità, infatti egli non solo riuscì a conquistare la Gallia e a portarsi oltre la Manica, ma occupò pure alcune terre d'Oriente. L'imprevedibile ascesa di Cesare lasciò Pompeo sbigottito. Questi cercò allora di accordarsi col Senato per farlo estromettere, ma Cesare gli mosse guerra e Pompeo venne sconfitto e ucciso a *Farsalo*. Rientrato così a Roma nel 45 a.C. *Cesare fu eletto dittatore a vita*. Operò molte riforme sia in campo politico che amministrativo e istituzionale. Diventò "imperator" cioè capo supremo dell'esercito, capace di radiare i senatori non ritenuti degni, coprì la carica di pontefice massimo, fondò nuove colonie ed estese ad esse la cittadinanza. Instaurò una politica fortemente invisa ai gruppi privilegiati, orientata a risanare la corruzione dello Stato e a contrastare la sperequazione economica. Tuttavia, furono tanti gli avversari che non accettarono un così grande cambiamento. Infatti, il 15 marzo del 44 a.C., un gruppo di senatori capeggiati da **Bruto e Cassio** uccise Cesare.

Alla morte di Cesare, gli uomini del suo partito cercarono di guadagnare il favore del popolo, aizzati soprattutto dal valoroso luogotenente **Marco Antonio** che mosse guerra contro i congiurati. A ciò il senato rispose mandando in campo **Ottaviano**, nipote di Cesare ed erede di tutti i suoi beni. Egli però si avvicinò ad Antonio trattando in segreto con lui, infatti nel 43 a.C. i due, con l'alleanza di **Lepido**, formarono il **secondo triumvirato** e nel 40 a.C. Antonio sposò Ottavia, sorella di Ottaviano. I triumviri iniziarono una serie di conquiste e nella spartizione delle province *Ottaviano ottenne l'Occidente, Antonio l'Oriente*, mentre Lepido, messo da parte, assunse solo la carica di pontefice massimo. Tra Ottaviano e Antonio, che intanto in Egitto si era legato a *Cleopatra*, quello che deteneva un potere maggiore era Ottaviano. Questi, infatti, ottenne molte simpatie da parte del senato. Le elargizioni territoriali da parte di Antonio a favore di Cleopatra, il suo atteggiamento sempre più orientale ed il ripudio di Ottavia causarono la rottura con Roma e uno scontro diretto con Ottaviano che nel 31 a.C. lo sconfisse ad *Azio*. Antonio e Cleopatra si rifugiarono ad Alessandria e alla caduta della città si suicidarono entrambi. Così Ottaviano, diventato ormai padrone anche dell'Egitto, tornò a Roma e si fece eleggere imperatore, assumendo il nome di *Augusto*.

Con **Ottaviano Augusto** l'impero romano attraversò un periodo pacifico (*pax augusta*) e pieno di riforme, che prese il nome di *età aurea*. Successore di Ottaviano fu il figliastro **Tiberio** (14 d.C.) che salì al potere durante gli anni di Cristo. Seguì l'imperatore **Caligola**, pronipote di Tiberio, il cui impero durò pochissimo per le inconcepibili stranezze che questi commetteva a causa di gravi disturbi psichici. Al suo posto, dopo la sua uccisione, venne eletto lo zio, **Tiberio Claudio**. La preoccupazione di quest'ultimo era soprattutto quella di estendere i diritti di cittadinanza in tutte le province. Venne molto ostacolato dal senato e avvelenato dalla moglie *Agrippina*. Salì così al potere il figlio di Agrippina, **Nerone**, un imperatore stravagante, famoso per aver instaurato una monarchia assoluta e per aver dato il via alle prime *persecuzioni cristiane*. Suicidatosi nel 68 d.C., Nerone lasciò il posto a **Vespasiano**, abile condottiero, primo imperatore straniero che ebbe come obiettivo principale il risanamento delle finanze. Numerose furono le opere pubbliche da lui compiute, quali la *costruzione dell'Anfiteatro e dell'Arco di Trionfo*, fatto ergere in onore del figlio **Tito**. A prendere il posto dell'imperatore Tito fu il grande **Domiziano**, ricordato per i meriti riconosciutigli sia in politica estera, che interna.

La storia di Roma in questo periodo fu fortemente legata alle *persecuzioni cristiane*. La religione romana era stata sempre aperta agli influssi di differenti civiltà. Tuttavia, se altre religioni venivano accettate dall'autorità imperiale, non lo stesso avveniva per il Cristianesimo la cui dottrina rigidamente monoteista rifiutava il culto della persona dell'imperatore. Malgrado le persecuzioni e i crudi martirii, il nuovo culto riuscì ad acquistare sempre maggior forza e a diffondersi tra il popolo romano.

Nel 96 d.C. **Nerva**, il nuovo imperatore, venne eletto direttamente dal senato. Con lui iniziò il periodo più luminoso della storia romana, senza conflitti tra principi e senato. Nerva morì nel 98 e gli successe **Traiano**, imperatore che, oltre a compiere una serie di riforme interne, effettuò

alcune importanti conquiste come quella della *Dacia*, regione fino ad allora intoccabile. **Adriano** prese il posto di Traiano e subito dopo salì al potere un senatore, **Antonino il Pio**. Il regno di quest'ultimo fu caratterizzato dall'assenza totale di guerre.

Nel 169 a Roma regnarono per la prima volta due imperatori insieme: **Marco Aurelio** e **Lucio Vero**, ma il primo rimase subito solo a causa dell'improvvisa morte di Lucio. Durante il regno di Marco Aurelio si combatterono ben 17 guerre che in poco tempo impoverirono le finanze statali. A ciò si aggiunse una terribile epidemia che si diffuse in tutto il regno e che provocò la morte dello stesso imperatore. Prese il posto di Marco Aurelio il figlio **Commodo**, che cercò di ingraziarsi la plebe organizzando fastosi giochi circensi, ma si dimostrò ostile ai senatori. Venne ucciso nel 192 e al suo posto venne eletto **Settimio Severo**, di origine africana, che però lasciò subito il posto al figlio tredicenne **Caracalla**. Quest'ultimo è ricordato per la "Costituzione Antoniana" o "*Editto di Caracalla*", con cui venne estesa la cittadinanza romana anche ai popoli del Mediterraneo.

Intorno alla metà del 200 d.C. Roma andò incontro ad un processo d'indebolimento che si estese a tutta l'Italia. Le cause furono le tremende guerre che decimarono la popolazione e una grave crisi spirituale ed economica. La classe dirigente era completamente disinteressata ad ogni attività industriale e ciò fu aggravato dal ritorno dei barbari minaccianti, da sempre, le frontiere. Questi nemici erano costituiti da diversi popoli: Angli, Franchi, Vandali, Goti etc. L'imperatore **Aureliano** fu uno dei pochi capaci di frenare la loro discesa, ma alla sua morte, avvenuta nel 270 d.C., i problemi ricominciarono. Nel 284 avvenne l'elezione di **Diocleziano**. Questo, convinto che un solo imperatore non bastasse a reggere tutto l'impero, nominò un *collega*, **Massimiano**, al quale affidò il regno d'Oriente. Il provvedimento più importante preso in questo periodo fu "*l'Editto dei prezzi*", che fissò, appunto, dei prezzi di vendita per ogni genere di consumo. Ma Diocleziano fu famoso anche per la più *terribile persecuzione contro i cristiani*, la decima ed ultima, avvenuta nel 303 d.C. A prendere il posto di Diocleziano, intorno al 305, furono ben sei persone, tre in *Occidente* (**Costantino, Massenzio e Massiano**) e tre in *Oriente* (**Galerio, Massimino e Licinio**). In Occidente però rimase solo Costantino che mosse subito guerra a Licinio uccidendolo nel 324 e diventando l'unico regnante.

Costantino fu un grande imperatore. Tra le sue innovazioni ricordiamo il trasferimento della capitale da Roma a *Bisanzio* (*Costantinopoli*) e il riconoscimento ufficiale della religione cristiana, diffusasi ormai in tutte le province. A dimostrazione di questo riconoscimento nel 325 Costantino convocò un *concilio a Nicèa* e dichiarò come "vera" la dottrina del cristianesimo, rifiutando tutte le altre. Il suo obiettivo era unificare l'impero e chiamarlo "*impero cristiano*".

Dopo Costantino, solo due imperatori furono in grado di distinguersi: **Giuliano l'Apostata** e **Teodosio il Grande**. Il primo venne chiamato così perché convertitosi in un primo momento al cristianesimo, ufficializzò tale religione, e successivamente svelò la sua fede pagana. Il secondo, invece, venne eletto imperatore nel 379 d.C. Egli volle a tutti i costi instaurare la pace. Infatti, pur di far cessare qualsiasi ostilità assegnò dei territori ai popoli *Visigoti*, in modo da frenare la loro avanzata. Nel 380 emanò un *l'editto di Tessalonica*, con il quale riconobbe a tutti gli effetti il Cristianesimo come religione ufficiale dello Stato. Morto Teodosio nel 395 d.C. l'impero fu diviso nuovamente in due parti e da allora non venne più unificato. Il potere militare, finito nelle mani dei barbari, prevaricò su quello civile e favorì una crescente autonomia dei grandi proprietari terrieri che riuscirono a strappare nuovi privilegi allo Stato intaccandone l'autorità e il prestigio.

Intanto le invasioni barbariche erano sempre più frequenti e le pretese dei Visigoti sempre più ampie. L'impero romano subì ulteriori danni dall'invasione degli **Unni**, guidati da **Attila**, e dal *secondo sacco di Roma* ad opera dei Vandali nel 455.

La storia romana si conclude nel 476 d.C. con la deposizione dell'ultimo imperatore, **Romolo Augusto** avvenuta da parte di **Odoacre** comandante delle milizie barbariche. Da questo mo-

mento in poi non esisterà più l'Impero Romano d'Occidente, ma dei regni detti romano-barbarici, frutto della fusione degli elementi romani, germanici e cristiani. Comincia la cosiddetta età medioevale.

STORIA MEDIOEVALE. Alla caduta dell'Impero Romano d'Occidente conseguì la nascita dei regni **romano-barbarici**. L'integrazione dei barbari nelle terre conquistate avvenne in maniera graduale. Essi riconoscendo fin dal principio la superiorità dei popoli vinti vollero acquisire tutti gli elementi della loro civiltà, vollero cioè *romanizzarsi*.

I popoli barbarici che si stanziarono in Europa occidentale erano composti da due grandi gruppi: Franchi, Sassoni e Alemanni da una parte, Visigoti, Ostrogoti e Vandali dall'altra. Il primo regno **romano-barbarico** che si costituì fu quello dei Vandali. Essi si stanziarono nell'Africa settentrionale, ma furono presto sopraffatti dall'imperatore **Giustiniano** il quale regnava nell'ancora saldo Impero Romano d'Oriente, da lui ribattezzato come **Impero Bizantino**. L'obiettivo di Giustiniano era riconquistare i territori d'Occidente per formare di nuovo un impero unitario. Egli in parte riuscì nel suo intento, sconfisse molte popolazioni straniere, ma non riuscì a riconquistare l'Italia che fu invasa intorno al 529 da un'altra popolazione di barbari, i **Longobardi** (odierni ungheresi). In un primo tempo i bizantini non opposero molta resistenza ai nuovi invasori perché convinti di una loro spontanea ritirata, ben presto, però, essi furono sopraffatti dalla superiorità di questa popolazione. I Longobardi, infatti, erano riusciti a mantenere ben saldo il controllo del territorio italiano costruendo in vari punti strategici della penisola delle roccaforti inespugnabili. La *pace di Bisanzio* concluse la lotta tra Bizantini e Longobardi e stabilì una divisione del territorio tra i due popoli, cioè ai Longobardi andò la parte dell'Italia settentrionale (Lombardia, Piemonte, Veneto, Toscana, Emilia) e ai Bizantini quella dell'Italia meridionale. Tuttavia, il popolo longobardo non riuscì a formare in Italia un regno duraturo, anzi il loro territorio si presentò presto particolarmente debole e facilmente attaccabile. Nacquero così delle ostilità con gli altri popoli barbari e soprattutto con un'altra dinastia che dominava in quel periodo l'Italia: i **Franchi**. Questi ultimi, grazie anche all'appoggio del papa, mossero guerra ai Longobardi sconfiggendo il loro re **Astolfo**. Ma i Franchi, invece di sottomettere i vinti, vollero unirsi a loro per solidificare meglio l'impero. Per consolidare questa unione Carlo Magno, figlio del re dei franchi **Pipino il Breve**, sposò la figlia del re longobardo **Desiderio**, di nome **Ermengarda**.

Carlo Magno però era un uomo notevolmente ambizioso, egli voleva eliminare tutti i vari regni d'Italia e creare un solo regno unito di tipo *franco - cristiano*. In questo obiettivo fu aiutato dal Papa Adriano I che chiese il suo intervento contro il re dei longobardi Desiderio. Allora Carlo Magno, approfittando della morte del padre Pipino e del fratello Carlomanno, si fece nominare unico re dei franchi, ripudiò la moglie Ermengarda e andò a combattere e conquistare l'impero longobardo (774), sconfiggendo il re Desiderio e costringendolo a fuggire a Bisanzio. Carlo Magno diventò così anche re dei Longobardi.

La politica di Carlo Magno si mosse in più direzioni, egli voleva sconfiggere definitivamente tutti i nemici, ma per ottenere ciò era necessario conquistarsi l'appoggio della Chiesa. Così il re donò alcune terre dell'Italia centrale al Papa Leone III per dimostrargli la sua devozione ed in cambio, la notte di Natale dell'800, si fece incoronare imperatore. Diede vita così al **Sacro Romano Impero** (fondato dalla dinastia dei **Carolingi**), che costituiva la massima rappresentazione dell'unione tra potere religioso e potere politico. Per mantenere saldo questo impero Carlo dovette dibattersi tra mille difficoltà, ecco perché decise di affidare alcuni territori del regno a validi amministratori scelti tra i suoi più valorosi compagni. Egli legò a sé questi amministratori con un patto di fedeltà personale detto *vassallaggio*. I vassalli divennero così alti funzionari dell'Impero e venivano ricambiati dall'imperatore, per i loro servizi, con delle terre concesse

loro in usufrutto. Nacque il **feudalesimo** espressione di un accentramento del potere nelle mani di un solo *signore*, il feudatario, che usufruiva di tutti i benefici ottenuti dalle terre concesse gli in usufrutto sfruttando il lavoro della povera gente (*servi della gleba*). Se il feudo era molto grande il signore nominava altri uomini di fiducia detti valvassori che a sua volta nominavano i valvasini.

Carlo Magno morì nel 814 lasciando il posto al figlio, Ludovico il Pio, che quasi subito divise il regno in tre parti, rispettivamente ai suoi tre figli, Lotario, Ludovico il Germanico e Carlo il Calvo.

Le invasioni in Italia da parte dei barbari continuavano imperterrite. Ottone I, re di Germania, scese in Italia e ricevette la corona imperiale, mentre nel 1053 venne eletto Papa Leone IX, fondatore della riforma della Chiesa. I rapporti tra Impero e Chiesa però si inclinarono verso il sec. XI, durante il quale sorse un contrasto di natura politico-religiosa tra papato e le autorità secolari circa il diritto di conferire le cariche. Dal momento che i vescovi esercitavano, in molti casi, i poteri locali per volere dell'imperatore, sembrava del tutto naturale che l'imperatore stesso intervenisse nel conferimento delle cariche episcopali. Nacque così la *lotta per le investiture* durante la quale il papato cercò in tutti i modi di sottrarre alle autorità secolari dei singoli regni il controllo dei rispettivi episcopati. Ciò fu particolarmente evidente con il pontificato di **Gregorio VII** il quale provocò addirittura uno scisma all'interno della Chiesa e la guerra civile in Germania. La lotta per le investiture si concluse nel 1122 con il *concordato di Worms* che stabilì la rinuncia da parte dell'imperatore a *investire* i vescovi.

Nel frattempo acquisiva notevole importanza un'altra popolazione, quella dei **Normanni**, che dopo aver conquistato diversi territori europei, scesero nell'Italia meridionale con a capo il duca **Guglielmo d'Altavilla**, detto il **Conquistatore**. Essi occuparono la Puglia scacciando i bizantini e vi costituirono la contea di Melfi. Intanto tra il 1137 e il 1139 il successore di Guglielmo il Conquistatore, **Ruggero II d'Altavilla**, conquistava la Sicilia provocando il definitivo crollo del regno bizantino nell'Italia meridionale e formava un solido Stato con capitale Palermo.

Nel 1152 salì sul trono di Germania il normanno **Federico Barbarossa** che scese nella nostra penisola nel 1154 in aiuto dei comuni più deboli dell'Italia del nord. Nel 1155 Federico venne incoronato re. Le lotte contro i comuni liberi dell'Italia del nord, sostenuti dal Papa, si protrassero fino al 1183, data in cui vi fu la riconciliazione, a Costanza, tra il Barbarossa ed il papato (*Pace di Costanza*). Il figlio di Federico Barbarossa, **Enrico IV**, sposò **Costanza d'Altavilla**, erede del regno normanno di Sicilia cosicché anche lui venne incoronato re d'Italia. Il suo successore, **Federico II**, salendo al potere, mirò ad unire l'Italia del nord con quella del sud e a ridurre il potere dei comuni e del papato. Ciò provocò una frattura tra potere imperiale e temporale, dalla quale si formarono due fazioni distinte: la fazione dei Guelfi, che parteggiava per il Papa, e quella dei Ghibellini che sosteneva l'Imperatore.

Alla morte di Federico II, il Papa Urbano IV offrì la corona di Sicilia a **Carlo d'Angiò**, fratello del re di Francia, che scese in Italia sconfiggendo il figlio illegittimo di Federico II, Manfredi. Napoli divenne così la sede della corte Angioina. Questo però causò nel 1282, a Palermo, una rivolta dei contadini contro gli Angioini e a favore degli Aragonesi, passata alla storia come "*Guerra del Vespro*". La corona di Sicilia venne così offerta al genero di Manfredi, Pietro III d'Aragona. La lotta si concluse con la *pace di Caltabellotta*, che assegnava la Sicilia agli Aragonesi.

La lotta tra impero e papato sembrava non cessare mai, infatti un passaggio storico importante fu segnato dallo scontro tra **Papa Bonifacio VIII** e **Filippo il Bello** di Francia. A determinare la frattura fu la politica accentratrice di Filippo intenzionato a sottomettere il potere religioso a quello laico. Intanto, nel 1300 Bonifacio VIII indiceva il primo Giubileo della Chiesa cattolica e nel 1302 scomunicava Filippo il Bello. Ma ciò non bastò a risolvere la questione, infatti, il papa

fu costretto a subire le angherie del sovrano che inviò in Italia l'esercito francese per farlo arrestare. Bonifacio VIII nonostante si fosse rifugiato ad Anagni, venne catturato e addirittura schiaffeggiato (*schiaffo di Anagni*). Fortemente umiliato il papa morì nel 1303 e nel 1309, per il piacere di Filippo il Bello, la sede della Chiesa cattolica venne trasferita da Roma ad Avignone, in Francia. Dal 1309 al 1377 durò la cosiddetta *cattività avignonese* durante la quale furono eletti solo papi francesi. Nel 1377 la sede papale, ad opera di Gregorio XI, venne riportata nuovamente a Roma, ma la crisi tra potere temporale e potere spirituale non fu risolta. Nel 1378 alla morte di Gregorio XI l'Europa non riconobbe più un unico pontefice, infatti, a Roma venne eletto papa Urbano VI ed in Francia Clemente VII. Questa memorabile profonda fattura della Chiesa cattolica prese il nome di **grande scisma d'Occidente**, durante il quale si fronteggiarono addirittura tre Papi. Lo scisma ebbe termine nel 1417 con il *concilio di Costanza* dove venne eletto un unico papa, Martino V.

L'Italia del medioevo era un paese diviso in molteplici stati mentre in Europa si andavano formando degli *stati unitari*, vere e proprie monarchie assolute. La nascita degli stati unitari, come Francia, Inghilterra, Spagna, è da attribuire al volere dei sovrani regnanti, i quali non volevano riconoscere nessuna autorità al di sopra di essi, né al di sopra del proprio regno. Nacquero delle forti ostilità tra uno stato e l'altro, soprattutto tra Francia e Inghilterra che si combatterono per un lungo periodo di tempo (**guerra dei cento anni**) a partire del 1337 fino al 1453. La causa del contrasto fu dovuta al fatto che la casa regnante inglese, di famiglia normanna, non volle rinunciare ai feudi che possedeva in Francia. Figura importante, quasi leggendaria, di questa guerra fu **Giovanna d'Arco**, nativa d'Orleans, la quale riuscì a risollevarle le sorti francesi combattendo in prima persona, riconquistando tutto il territorio nazionale e lasciando agli inglesi solo il porto di Calais.

Se in Europa si andava consolidando l'assetto dei vari stati-nazione, in Italia si assisteva ad un continuo frazionamento territoriale a causa della nascita dei **Comuni**. Questi erano in continua lotta tra loro per l'espansione o per la difesa dei propri confini. Tra le varie città italiane ne spiccavano alcune dotate di una vera e propria indipendenza, tanto da chiamarsi *repubbliche*. Alcune di queste repubbliche assunsero il nome di *città marinare*: Amalfi, Genova, Pisa e Venezia. Esse, avvantaggiate dalla loro posizione geografica, consentirono al ceto mercantile di arricchirsi sfruttando le ricchezze ed i profitti derivanti dal commercio via mare. Intanto che le repubbliche marinare si arricchivano, gli altri comuni erano sempre più agitati da conflitti interni e non riuscivano ad assicurare pace e stabilità ai loro abitanti. La situazione dei comuni migliorò quando il potere della città venne affidato ad un solo *signore*, in genere un nobile, che lo doveva detenere per un certo numero di anni. Il Signore poteva esercitare, anche grazie al consenso dei cittadini, il proprio potere a vita e, dunque, trasferirlo ai propri figli. Questo fenomeno determinò la nascita delle **Signorie**.

ECCO COME RISULTANO DIVISE L'EUROPA E L'ITALIA TRA IL 1300 E IL 1400. I regnanti d'Italia erano:

nel Ducato di Milano (attuale Lombardia) gli Sforza ed i Gonzaga. In Emilia Romagna gli Este. Nella repubblica di Firenze i De' Medici. Nel Lazio, Umbria e Marche (Stato della Chiesa) il Papa. Nel Regno di Napoli (attuale meridione d'Italia), in Sicilia e in Sardegna gli Aragonesi.

Le più importanti **repubbliche** erano quella di Genova che comprendeva la Corsica e la Liguria, e quella di Venezia. Accanto ad esse si sviluppava, infine, il Ducato di Savoia che si estendeva, in parte, sull'attuale Piemonte.

L'**Europa** era divisa invece nel regno di Francia, regno d'Aragona e di Castiglia nella Spagna, regno romano-germanico, regno d'Ungheria, regno di Polonia, regno d'Inghilterra e regno di Scozia.

QUESITI DI VERIFICA

01. *In che anno cadde l'Impero Romano d'Occidente?*
- a) 476 a.C c) 1492
 b) 476 d.C d) 1000
02. *Cosa avvenne con l'invenzione della scrittura?*
- a) Gli uomini impararono a comunicare
 b) Vennero facilitati i commerci
 c) Aumentarono le persone colte
 d) Ebbe inizio la storia
03. *La prima crociata fu indetta nel...*
- a) 1095 c) 1132
 b) 1193 d) 1058
04. *La lotta per le investiture avvenne durante il:*
- a) Risorgimento c) Feudalesimo
 b) Rinascimento d) Romanticismo
05. *La libertà di culto dei Cristiani fu sancita con:*
- a) La pace di Rotari c) La pace di Roma
 b) L'editto di Milano d) L'accordo di Parigi
06. *La Signoria degli Estensi in quale città si sviluppò?*
- a) Verona c) Firenze
 b) Mantova d) Ferrara
07. *Chi inventò la stampa a caratteri mobili?*
- a) Newton c) Franklin
 b) Jenner d) Gutenberg
08. *L'Editto Di Nantes affermò:*
- a) L'Abolizione della schiavitù
 b) L'eliminazione delle classi sociali
 c) Il principio della tolleranza religiosa
 d) Il rispetto per le minoranze religiose

09. **Contro i dominatori spagnoli scoppiò a Napoli nel 1647:**

- a) Un'insurrezione popolare
- b) La rivolta di Masaniello
- c) Un'agitazione chiamata "la notte dei coltelli"
- d) La rivolta di Sapri

10. **Foglianti, giacobini e girondini costituivano...durante la rivoluzione francese**

- a) L'assemblea legislativa
- b) Il Terzo Stato
- c) La nobiltà
- d) Il clero

11. **La battaglia di Marengo fu combattuta nel:**

- a) 1805
- b) 1799
- c) 1800
- d) 1792

12. **Danton fu condannato a morte da...**

- a) Napoleone
- b) Girondini
- c) Giacobini
- d) Luigi XVI

13. **In quale occasione venne per la prima volta discussa da Cavour la questione italiana?**

- a) Convegno di Plombières
- b) Congresso di Parigi
- c) Armistizio di Villafranca
- d) Guerra di Crimea

14. **Durante "Le Cinque giornate di Milano" era re dello stato sabaudo:**

- a) Vittorio Emanuele I
- b) Vittorio Emanuele II
- c) Carlo Alberto
- d) Carlo Felice

15. **L'impresa di Bezzeca di Garibaldi è legata a:**

- a) II guerra d'indipendenza
- b) Spedizione dei Mille
- c) Guerra di Crimea
- d) III guerra d'indipendenza

16. **L'alleanza politica e parlamentare tra il centrodestra e il centrosinistra promossa da Cavour e Rattazzi va sotto il nome di:**

- a) Connubio
- b) Trasformismo
- c) Patto segreto
- d) Trade Union

17. **Nel 1867 le truppe francesi bloccarono:**

- a) L'esercito austriaco
- b) Le truppe del re
- c) L'avanzata garibaldina verso Roma
- d) L'esercito borbonico

18. *Quale uomo politico esprimeva l'opinione "Libera chiesa in libero stato"?*

- a) Mazzini
- b) Gioberti
- c) Pio IX
- d) Cavour

19. *Durante il regime fascista ci fu la riforma di una legge elettorale:*

- a) La legge Coppino
- b) La legge Acerbo
- c) La legge per la scelta dei senatori
- d) La legge sindacale

20. *Nel 1933 Italia, Germania, Gran Bretagna e Francia stipularono il patto:*

- a) Di non aggressione
- b) Di amicizia
- c) Di cooperazione
- d) A quattro

RISPOSTE COMMENTATE

01. *Risposta esatta: b*
In questa data ebbe inizio il Medioevo, che terminò nel 1492 con la scoperta dell'America.
02. *Risposta esatta: d*
L'invenzione della scrittura segnò la fine della preistoria e l'inizio della storia.
03. *Risposta esatta: a*
Le Crociate furono spedizioni militari compiute dai Cristiani per conquistare la Terra Santa sottraendola ai Musulmani.
04. *Risposta esatta: c*
Era il diritto di conferire cariche; il conflitto avvenne tra impero e papato e si risolse nel 1122 con il concordato di Worms tra Enrico V e Callisto II secondo cui il papa avrebbe nominato i vescovi e l'imperatore i feudatari.
05. *Risposta esatta: b*
Ciò avvenne nel 313 d.C con Costantino.
06. *Risposta esatta: d*
07. *Risposta esatta: d*
Questa invenzione, verso la metà del 1400, avrebbe sostituito gli amanuensi.
08. *Risposta esatta: c*
Fu emanato il 13/4/1598 da Enrico IV di Francia per definire i diritti dei protestanti (ugonotti), mettendo fine alle guerre di religione.
09. *Risposta esatta: b*
Tommaso Aniello (Masaniello) capitanò la rivolta della plebe napoletana esasperata dalla pressione fiscale il 7/7/1647.
10. *Risposta esatta: a*
Era l'assemblea del 1791.
11. *Risposta esatta: c*
In quella battaglia Napoleone sconfisse l'Austria.
12. *Risposta esatta: c*
Robespierre lo fece arrestare con l'accusa di tradimento e corruzione (31/3/1794); il tribunale rivoluzionario lo condannò alla ghigliottina.
13. *Risposta esatta: b*
L'Italia non ottenne vantaggi dalla vittoria nella guerra di Crimea, ma per la prima volta Cavour discusse la questione italiana al Congresso (1856).
14. *Risposta esatta: c*
Avvennero dal 18 al 22 marzo 1848 e furono il preludio alla prima guerra d'indipendenza.

ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO E CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

CALCOLO COMBINATORIO

1. GENERALITÀ

Il calcolo combinatorio ha come oggetto il calcolo dei modi con i quali possono essere associati, attraverso regole prestabilite, gli elementi di due o più insiemi, o di uno stesso insieme. Nell'applicazione pratica si può porre il problema di conoscere in quanti modi si può presentare un fenomeno; ad esempio si potrebbero porre quesiti dei tipi seguenti:

- quante sono le possibili graduatorie che si possono formare da un gruppo di persone partecipanti ad un concorso?
- Come può essere la tabella dell'ordine di arrivo di una gara o la classifica delle squadre partecipanti ad un torneo?
- In quanti modi si possono scegliere i campioni di una popolazione per un'indagine statistica? L'elenco potrebbe continuare all'infinito, qui abbiamo voluto solo indicare qualche esempio pratico chiarificatore.

Il problema di conoscere le risposte alle domande del tipo suindicato può sembrare banale, ma quando il numero degli elementi è elevato la difficoltà consiste proprio nel formare tutti i raggruppamenti senza tralasciarne alcuni e senza incombere in ripetizioni.

Tali raggruppamenti possono essere fatti in molti modi; qui ci limiteremo ad esaminare i casi più importanti e più frequenti nelle applicazioni pratiche.

È bene sottolineare subito che, prima di applicare ai casi concreti le formule, si dovranno esaminare con attenzione i dati a disposizione e gli scopi che si prefiggono. Poiché la matematica offre modelli che cercano di interpretare casi reali, occorre capire a quale modello bisogna far riferimento nella applicazione reale che si sta interpretando.

2. DISPOSIZIONI SEMPLICI

Consideriamo un solo insieme di riferimento e formiamo dei raggruppamenti associando tra loro gli elementi dell'insieme stesso.

Esempi:

Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ si vogliono formare tutte le possibili sigle di due elementi presi da A . Vediamo quali sono:

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	ce
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

Questi raggruppamenti vengono detti *disposizioni* con ripetizione di 5 elementi di classe 2.

In generale questo tipo di raggruppamento è detto *disposizioni con ripetizione di n elementi di classe K* , dove il numero n è il numero di elementi presi in considerazione per fare i raggruppamenti, che non sempre coincidono con tutto l'insieme, e K è il numero degli elementi che compongono ogni raggruppamento.

Dall'esempio si nota che i raggruppamenti sono $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$.

Quindi,

$$\boxed{D_{n,k} = n^k} \quad \text{Disposizioni con ripetizione}$$

Ora se, dall'esempio precedente, volessimo eliminare i raggruppamenti nei quali vi sono elementi che si ripetono, otterremmo:

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	ce
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

I raggruppamenti rimasti sono $20 = 5 \cdot 4$.

Questi raggruppamenti sono detti *disposizioni semplici* (o senza ripetizione) di n elementi di classe K .

$$\boxed{D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots [n - (K - 1)]} \quad \text{Disposizioni semplici (senza ripetizione)}$$

Il numero di queste disposizioni semplici di n elementi di classe k è uguale al prodotto di k fattori interi consecutivi decrescenti a partire da n .

Esempio:

Quante parole di quattro lettere, ripetute o no (anche senza significato) si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano?

Considerando anche le parole contenenti lettere ripetute si ha:

$$D_{21,4} = 21^4 = 194.481$$

Se invece le lettere non possono essere ripetute, allora si ha

$$D_{21,4} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 143.640$$

3. PERMUTAZIONI SEMPLICI

Pensiamo ora ad un insieme di cinque elementi e se volessimo combinare tutti gli elementi tra di loro?

La risposta è semplice: dato un insieme A di n elementi, si definiscono *permutazioni di n elementi (diversi fra loro)*, i raggruppamenti formati dagli n elementi scelti in ordine qualsiasi.

Esempio:

1. Ad un concorso sono stati selezionati tre concorrenti A, B, C ; calcolare quanti sono i possibili modi nei quali si può presentare la graduatoria finale.

Tutte le graduatorie possibili sono le seguenti:

$$ABC \quad ACB \quad BAC \quad BCA \quad CAB \quad CBA$$

queste sono $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3$

Quindi il numero delle permutazioni di n elementi è:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \text{ (leggasi } n \text{ fattoriale)}$$

Il nostro n fattoriale, come avrete capito, non è altro che il prodotto dei primi n numeri naturali, ad esempio $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$.

Quindi possiamo affermare che

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Vediamone un esempio: $5! = 5 \cdot 4!$, è vero in quanto $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Noi sappiamo che le permutazioni sono senza ripetizioni, ma vi è un caso in cui vi sono elementi ripetuti, cioè se nell'insieme di riferimento ci sono *ripetizioni*.

Ad esempio se l'insieme è la parola "MAMMA", e vogliamo sapere in quanti modi si può anagrammare, dovremmo tener conto del fatto che ci sono tre M e due A.

In generale se dato un insieme di n elementi dei quali α sono eguali fra loro, e β sono eguali fra loro, ecc., il numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti che si possono ottenere risulta:

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots)} = \frac{n!}{(\alpha! \cdot \beta! \cdot \dots)} \quad \text{Permutazioni con ripetizioni}$$

Quindi nel nostro esempio i possibili anagrammi della parola "MAMMA" sono:

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Non è detto che gli elementi che si ripetono debbano essere obbligatoriamente due o più (α, β, \dots , ecc. ...), può essere anche uno solo.

Esempio:

Anagrammando la parola "GIORNO" avremmo $P_6^{(2)} = \frac{6!}{2!} = 360$, perché la "O" si ripete due volte.

4. COMBINAZIONI SEMPLICI

Dato un insieme B di n elementi, si definiscono **combinazioni semplici** degli n elementi di classe k (con $k \leq n$), i raggruppamenti di k elementi, scelti fra gli n dell'insieme B , tali che ogni raggruppamento differisca dagli altri per la natura degli elementi e non per l'ordine.

Facciamo un esempio:

Dato l'insieme $B = \{a, b, c, d\}$, calcoliamo le combinazioni semplici di 4 elementi di classe 2:

ab ac ad bc bd cd

Ora se da questo insieme volessimo determinare anche le disposizioni semplici di n elementi di classe k , otterremmo:

ab ac ad queste sono 12, cioè $4 \cdot 3$
 ba bc bd
 ca cb cd
 da db dc

Notiamo che le combinazioni erano $6 = 12/2$, cioè le $C_{n,k} = D_{n,k}/P_k$ quindi più in generale si ha:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} \quad \text{Combinazioni}$$

Solitamente si indica: $C_{nk} = \binom{n}{k}$ (leggasi n su k).

Il simbolo $\binom{n}{k}$ è detto *coefficiente binominale*,

per il suo uso nello sviluppo delle potenze del binomio.

Esempio:

Calcolare quante cinquine si possono estrarre da un'urna contenente i 90 numeri del lotto.

Le cinquine sono tante quante sono le combinazioni di 90 elementi di classe 5, cioè:

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43.949.268$$

5. COEFFICIENTI BINOMINALI E PROPRIETÀ

La formula dei coefficienti binomiali si può esprimere per mezzo dei fattoriali, nel seguente modo:

$$\binom{n}{k} = \frac{D_{nk}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Questi coefficienti binomiali godono delle seguenti proprietà:

a) Proprietà *simmetrica*, cioè $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pertanto si ha:

$$\binom{n}{n} = \binom{n!}{n!} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

b) Formula di *ricorrenza*: $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$

c) Proprietà di *Stifel*: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

In pratica le tre proprietà andrebbero dimostrate, ma è nostra opinione che la comprensione dell'argomento non dipenda dalle tre dimostrazioni; a tal fine abbiamo preferito non "annoiare" il lettore!

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

1. EVENTI CERTI, IMPOSSIBILI E CASUALI

La probabilità è la teoria che tratta i risultati possibili di un esperimento. In una prova **la probabilità del verificarsi di un evento E** è data dal rapporto fra il numero $n(E)$ dei casi favorevoli all'evento ed il numero n dei casi favorevoli e sfavorevoli (totali). Esprimendo il concetto in simboli si avrà:

$$p(E) = n(E)/n, \text{ perché tutti i casi siano equiprobabili.}$$

Per esempio la probabilità che lanciando una volta un dado non truccato si abbia il numero 4 è $1/6 = 0,16$ in quanto solo una faccia su sei ha stampato il numero 4.

Es.: Qual è la probabilità in un mazzo di carte di scegliere un otto? Poiché gli otto sono sempre 4 e le carte in totale sono 40 la probabilità sarà $4/40 = 0,1$.

Va ricordato che la probabilità è sempre compresa fra 0 e 1 ($0 \leq P \leq 1$), dove $P = 0$ quando l'evento è **impossibile** e $P = 1$ quando l'evento è **certo**.

2. REGOLA DELLA SOMMA

Dati due eventi incompatibili o mutuamente escludentisi E_1 e E_2 , aventi rispettivamente probabilità $P(E_1)$ e $P(E_2)$ di presentarsi, la probabilità di presentarsi dell'uno o dell'altro in una prova è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Es.: Vogliamo determinare la probabilità che da un mazzo di carte si estraiga un asso o una carta di spade. I casi favorevoli sono costituiti da 4 assi e dalle 10 spade meno l'asso di spade in quanto già considerato con gli assi, i casi possibili sono 40.

Quindi si ha:

$$P(A \text{ o } B) = (4 + 10 - 1)/40 = 4/40 + 10/40 - 1/40.$$

In questo caso l'asso di spade è un elemento di compatibilità e va sottratto alla somma dei due eventi:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

3. REGOLA DEL PRODOTTO

CASO DEL CAMPIONAMENTO CON REIMMISSIONE

Dati due eventi compatibili ed indipendenti E_1 ed E_2 , la probabilità del presentarsi dell'uno e dell'altro (simultanei o successivi) in una prova è data da:

$$P(E_1 \text{ e } E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Es.: In due lanci successivi di un dado, la probabilità di avere 3 e poi 4 è data da

$$P(3 \text{ e } 4) = P(3) \cdot P(4) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36 = 0,027.$$

CASO DEL CAMPIONAMENTO SENZA REIMMISSIONE

In un'urna vi sono 6 palline bianche, 4 rosse e 2 nere; vengono estratte a caso due palline senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna; la seconda estrazione ha una diversa composizione, infatti contiene una pallina bianca e una rossa.

I casi favorevoli sono rappresentati dalle coppie che si possono formare con le 6 palline bianche e le 4 rosse: $6 \cdot 4$; i casi possibili delle coppie che si possono formare con le 12 palline presenti nell'urna alla prima estrazione e le 12-1 che rimangono disponibili alla seconda.

$$6/12 \cdot 4/11 = P(B) \cdot P(R/B)$$

In questo caso, dunque, la probabilità di avere A e B è data dalla probabilità di A per la probabilità di B, una volta che l'evento A si sia già verificato:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

QUESITI DI VERIFICA

01. Il prodotto di due numeri relativi discordi è:

- a) Positivo c) Nullo
 b) Negativo d) Indeterminato

02. Nel numero 453976 determinare il valore delle centinaia

- a) 7 c) 9
 b) 3 d) 5

03. Un prodotto di più fattori non muta se ad alcuni di essi si sostituisce il loro prodotto; quella menzionata è la proprietà...

- a) Dissociativa della moltiplicazione
 b) Associativa della moltiplicazione
 c) Invariantiva della divisione
 d) Commutativa dell'addizione

04. Data la proporzione: $4 : 1 = 28 : 7$ applicare la regola dell'invertire

- a) $28 : 4 = 7 : 1$ c) $28 : 7 = 4 : 1$
 b) $4 : 28 = 1 : 7$ d) $7 : 1 = 28 : 4$

05. Nella proporzione $4 : 2 = 20 : 10$ trovare gli antecedenti

- a) 4 e 20 c) 2 e 10
 b) 4 e 10 d) 2 e 20

06. Che cos'è il grado di un'equazione?

- a) È la somma dei termini incogniti
 b) È la risoluzione dell'equazione stessa
 c) È l'esponente massimo con cui compare l'incognita
 d) È la somma degli elementi con l'incognita

07. Calcolare il valore della x : $5x + 2 = 4 - 3x$

- a) 2 c) $1/2$
 b) $1/4$ d) 6

08. Quali valori soddisfano la disequazione: $3x - 9 > 0$?

- a) $x > 9$ c) $x = 3$
 b) $x = 1/3$ d) $x > 3$

19. *A quale potenza con esponente negativo equivale il numero 0,001?*

- a) Dieci alla meno quattro
- b) Dieci alla meno tre
- c) Dieci alla meno due
- d) Dieci alla meno uno

20. *Di 76q di farina si vendono 400 Kg; che percentuale è stata venduta?*

- a) 13%
- b) 5,26%
- c) 18,2%
- d) 94,3%

RISPOSTE COMMENTATE

01. *Risposta esatta: b*
Due numeri relativi sono discordi quando hanno segno diverso.
02. *Risposta esatta: c*
Le centinaia occupano il terzo posti dopo unità e decine.
03. *Risposta esatta: b*
04. *Risposta esatta: a*
05. *Risposta esatta: a*
A 4 e 20 sono gli antecedenti, 2 e 10 sono i conseguenti.
06. *Risposta esatta: c*
07. *Risposta esatta: b*
 $5x + 3x = 4 - 2$; $8x = 2$; $x = 1/4$
08. *Risposta esatta: d*
Si risolve come un'equazione.
09. *Risposta esatta: b*
Le facce del dado sono sei, quindi ho una probabilità su sei che esca il quattro.
10. *Risposta esatta: d*
Il più piccolo numero naturale di tre cifre è 100 ed il più grande di due cifre è 99, quindi la differenza è 1.
11. *Risposta esatta: a*
12. *Risposta esatta: d*
Infatti semplificando, cioè dividendo per 3 numeratore e denominatore, si ottiene $5/4$.
13. *Risposta esatta: c*
14. *Risposta esatta: d*
È un quadrato di binomio.
15. *Risposta esatta: b*
La potenza di potenza di potenza lascia la stessa base e moltiplica gli esponenti.
16. *Risposta esatta: b*
17. *Risposta esatta: b*
Il peso specifico si ottiene: P/V , quindi $30/10=3$.

18. *Risposta esatta: d*

$$S = v \times t = 60 \times 1/6 = 10$$

19. *Risposta esatta: b*

20. *Risposta esatta: b*

$$400 \text{ Kg} = 4q; 76 : 100 = 4 : X; X = 400/76; X = 5,26.$$

Copyright © Esselibri S.p.A.