

MONOMI E POLINOMI

1. INTRODUZIONE

Si definisce *espressione algebrica razionale* un insieme di numeri e lettere legate fra loro mediante segni di operazioni in numero limitato.

Se in una espressione algebrica si sostituiscono alle lettere dei valori numerici assegnati l'espressione assume un valore numerico.

Es.: $3a^2 - b^2 + ab =$ espressione algebrica

per $a = -\frac{1}{2}$ e $b = +3$ svolgendo le date operazioni si ha come risultato $-\frac{39}{4}$.

Infatti: $3 \cdot \frac{1}{4} - 9 + \left(-\frac{1}{2} \cdot 3\right) = \frac{3}{4} - 9 - \frac{3}{2} = \frac{3-36-6}{4} = -\frac{39}{4}$

2. DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DEI MONOMI

Si definisce *monomio* un'espressione algebrica nella quale non figurano addizioni o sottrazioni.

Es.:

Sono monomi:

$$1) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (5)^2 \cdot (-1)^{-2} \quad 2) a^3 \cdot b^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-3)^2$$

Tenendo presenti le regole di calcolo si ha:

$$1) -\frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 1 = -\frac{50}{3} \quad 2) a^3 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 9 = -\frac{9}{4} \cdot \frac{a^3}{b^2}$$

Dagli esempi possiamo dedurre che un monomio può sempre trasformarsi in modo che esso abbia un solo fattore numerico, detto *coefficiente*, e fattori letterali tutti differenti. Il prodotto delle lettere prende il nome di *parte letterale*. In tal caso il monomio si dice ridotto a *forma normale*.

Se il monomio è privo di fattori numerici ha il coefficiente +1 o -1 a seconda che esso sia preceduto dal segno + o dal segno -

Es.: $\frac{3}{5}ab^2$

$$\frac{3}{5} = \text{coefficiente}$$
$$ab^2 = \text{parte letterale}$$

GRADO DI UN MONOMIO - MONOMI SIMILI - MONOMI OPPOSTI

Si definisce grado di un monomio rispetto ad una lettera l'esponente di tale lettera, mentre dicesi grado assoluto o semplicemente *grado* del monomio, la somma (algebrica) degli esponenti delle sue lettere.

Es.: il monomio

$$x^2y^3z^{-2}$$

è di grado 2 rispetto alla lettera x ;
 » 3 » y ;
 » -2 » z

pertanto il suo grado assoluto è $2 + 3 - 2 = 3$

- Due monomi si dicono *simili* se hanno la stessa parte letterale; se poi, oltre alla parte letterale, hanno anche lo stesso coefficiente si dicono *identici*.
- Due monomi simili aventi coefficienti opposti si dicono *monomi opposti*.
- Un monomio è *nullo* se il suo coefficiente è 0.

N.B. Ricordiamo che quando una lettera ha esponente negativo equivale ad una lettera presente al denominatore con esponente positivo!

$$x^2 y^3 z^{-2} = \frac{x^2 y^3}{z^2}$$

3. OPERAZIONI CON I MONOMI

SOMMA ALGEBRICA DI MONOMI

- La somma di più monomi si ottiene, in generale, scrivendo uno di seguito all'altro i monomi con i propri segni.

$$\text{Es.: } \left(-\frac{3}{4}a^2b\right) + \left(-\frac{1}{2}xy\right) = -\frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{2}xy$$

- La differenza di due monomi si ottiene aggiungendo al primo l'opposto del secondo.

$$\text{Es.: } \left(\frac{2}{3}abc^2\right) - (-3a^2b) = \frac{2}{3}abc^2 + 3a^2b$$

- Un insieme di addizioni e sottrazioni di monomi prende il nome di *somma algebrica di monomi*.

$$\text{Es.: } (+3ab) - (-a) - \left(\frac{1}{3}b^2\right) = +3ab + a - \frac{1}{3}b^2$$

RIDUZIONE DI TERMINI SIMILI

Può accadere che in una somma algebrica di monomi si abbiano monomi simili. In tal caso si può procedere avvalendosi della seguente regola:

la somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile ai dati, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$\begin{aligned}
 \text{Es.: } & -\frac{5}{3}\frac{a^2b}{c} + \left(+\frac{1}{4}a^2c\right) - \left(-\frac{2}{3}a^3c^2\right) + \left(-\frac{1}{3}\frac{a^2b}{c}\right) - \left(-\frac{1}{2}a^2c\right) = \\
 & = -\frac{5}{3}\frac{a^2b}{c} + \frac{1}{4}a^2c + \frac{2}{3}a^3c^2 - \frac{1}{3}\frac{a^2b}{c} + \frac{1}{2}a^2c = \\
 & = \left(-\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{a^2b}{c} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)a^2c + \frac{2}{3}a^3c^2 = \\
 & = -2\frac{a^2b}{c} + \frac{3}{4}a^2c + \frac{2}{3}a^3c^2
 \end{aligned}$$

N.B. Ricordiamo che *la somma di due monomi opposti è il monomio nullo, cioè 0.*

$$\text{Es.: } (+3ab^2) + (-3ab^2) = 0$$

PRODOTTO DI MONOMI

— Il prodotto di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti dei monomi dati e per parte letterale il prodotto dei fattori letterali di ciascun monomio.

Ricordando le regole enunciate per il prodotto dei numeri relativi e le proprietà delle potenze, si ha facilmente il prodotto di monomi.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } & \left(-\frac{3}{4}a^3b^2x\right) \cdot (-2abx^4) \cdot \left(+\frac{7}{3}axy^2\right) = \\ & = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) \cdot \left(\frac{7}{3}\right) a^3 \cdot a \cdot b^2 \cdot b \cdot x \cdot x^4 \cdot x \cdot y^2 = \left(\frac{7}{2}\right) a^5b^3x^6y^2 \end{aligned}$$

QUOZIENTE DI DUE MONOMI

Il quoziente di due monomi è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti; la parte letterale ha ciascuna lettera comune ai due monomi con esponente uguale alla differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore.

Le lettere non comuni restano inalterate se compaiono solo nel dividendo; hanno esponente opposto se compaiono solo nel monomio divisore.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } & \left(-\frac{2}{3}a^3b^2xy^2\right) : \left(-\frac{1}{3}abx^2\right) = \\ & = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-3) \frac{a^3}{a} \frac{b^2}{b} \frac{x}{x^2} y^2 = +2a^2bx^{-1}y^2 \end{aligned}$$

POTENZA DI MONOMI

La potenza ad esponente intero relativo di un monomio è un monomio avente per coefficiente la potenza a quell'esponente del coefficiente del monomio dato, e la parte letterale costituita dal prodotto delle potenze, a quell'esponente, dei fattori letterali del monomio dato (potenza di potenza). Il grado (relativo o assoluto) della potenza di un monomio è uguale al prodotto del grado del monomio per l'esponente della potenza.

$$\text{Es.: } \left(\frac{1}{2}a^2bx^3\right)^3 = \frac{1}{8}a^{-6}b^3x^9 = \frac{1}{8} \cdot \frac{b^3x^9}{a^6} \text{ di grado } 6$$

4. DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DEI POLINOMI

Dicesi *polinomio* la somma algebrica di due o più monomi.

$$\text{Es.: } 3x^2y + 4y^3 + 7$$

Se in un polinomio si hanno monomi simili, essi possono ridursi e si ottiene un polinomio *ridotto*.

— Il polinomio somma di due monomi, si dice *binomio*.

$$\text{Es.: } 4x^2 - \frac{1}{3}y$$

— Se è la somma di tre monomi prende il nome di *trinomio*.

$$\text{Es.: } 4x^2 - \frac{1}{3}y + 1$$

— Se è la somma di quattro monomi, dicesi *quadrinomio*.

$$\text{Es.: } a^2 - 3ab + \frac{1}{5}b^3 + 5$$

— Negli altri casi si usa il termine generico polinomio.

Un polinomio dicesi *intero* se tutti i suoi monomi sono interi, se qualcuno di essi è un monomio frazionario, il polinomio dicesi *fratto*.

GRADO RELATIVO E ASSOLUTO DI UN POLINOMIO

Se una lettera compare in uno o più monomi di un polinomio, il maggiore degli esponenti di tale lettera si dice **grado del polinomio rispetto a quella lettera**. Dicesi **grado assoluto del polinomio**, il maggiore dei gradi assoluti dei suoi monomi.

$$\text{Es.: } 4xy^3 - 3ab^5 + 4abx^2y - 7a^3b^2y^2 - 5 \quad \text{grado assoluto è } 7.$$

Se i monomi di un polinomio hanno tutti ugual grado, il polinomio dicesi *omogeneo*.

$$\text{Es.: } 7x^2y - ab^2 + 3a^3 + 5axy$$

è un polinomio omogeneo di 3° grado.

Si definisce polinomio *ordinato* rispetto a una lettera, un polinomio nel quale i suoi termini si succedono in modo che gli esponenti di quella lettera sono crescenti o decrescenti.

$$\text{Es.: } 3x^5 + 2bx^4 - \frac{1}{3}x^3yz^2 + 2x^2y^5 - 3xz + ab$$

Il suddetto è un polinomio ordinato rispetto a x .

Attenzione: Anche se si scambia l'ordine dei monomi, il polinomio è sempre ordinato rispetto a x !

5. OPERAZIONI CON I POLINOMI

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DI POLINOMI

— La somma algebrica di due o più polinomi, è il polinomio che ha per termini quelli dei polinomi dati, dopo che si sono sciolte le parentesi e ridotto i termini simili.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } & \left(-\frac{3}{4}x + y^2 - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{4}y^2 + 7y\right) = \\ & = -\frac{3}{4}x + y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{4}y^2 - 7y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - 7y \end{aligned}$$

PRODOTTO DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

— Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che ha per monomi i prodotti del monomio dato per ciascuno dei monomi del polinomio.

$$\text{Es.: } 3x^2y \cdot \left(-y^3 + \frac{1}{4}xy - 7x^2\right) = -3x^2y^4 + \frac{3}{4}x^3y^2 - 21x^4y$$

per la proprietà simmetrica delle uguaglianze la precedente può scriversi:

$$\text{Es.: } -3x^2y^4 + \frac{3}{4}x^3y^2 - 21x^4y = -3x^2y \cdot \left(-y^3 + \frac{1}{4}xy - 7x^2\right)$$

Da ciò si trae che se i monomi di un polinomio hanno un divisore comune, il polinomio è uguale al prodotto di tale divisore comune per il polinomio i cui monomi sono i quoti dei suoi termini per il divisore comune.

In questo caso si dice che si è operato un *raccoglimento a fattor comune*, oppure si è messo in evidenza tale fattore.

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

Il prodotto di due polinomi è uguale al polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine di uno di essi per tutti i termini dell'altro.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } & \overbrace{(3a + b) \cdot (a^2 + 5a - 3b)} \\ & = 3a^3 + 15a^2 - 9ab + a^2b + 5ab - 3b^2 \quad (\text{se necessario si riducono i termini simili}). \end{aligned}$$

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO

Se tutti i monomi di un polinomio sono divisibili per un monomio, allora si può affermare che il polinomio è divisibile per quel monomio.

Il quoto è il polinomio i cui termini sono i quoti di ciascun monomio del polinomio per il monomio.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } & \left(\frac{5}{8}a^3b^3 + 7a^4b^2 - \frac{1}{2}a^2bx - \frac{4}{3}a^4b^3y \right) : \left(-\frac{1}{2}a^2b \right) = \\ & = -\frac{5}{4}ab^2 - 14a^2b + x + \frac{8}{3}a^2b^2y \end{aligned}$$

DIVISIONE DI DUE POLINOMI

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

allora $Q(x)$ dicesi polinomio quoto dei due polinomi dati, o più semplicemente quoto. In tal caso si dirà che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$ e si scriverà

$$A(x) : B(x) = Q(x)$$

Se $A(x)$ non è divisibile per $B(x)$ si possono determinare altri polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che risulti

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Per semplificare il procedimento, basta seguire le regole seguenti:

1. *Ordinare i polinomi secondo le potenze decrescenti di una stessa lettera.*
2. *Dividere il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore; il quoziente sarà il primo termine del quoziente dei 2 polinomi dati.*
3. *Moltiplicare il divisore per questo primo quoziente e sottrarre il prodotto dal dividendo; il risultato è detto resto parziale.*
4. *Dividere il termine di grado maggiore per il primo termine del divisore ottenendo così il secondo termine del quoziente.*
5. *Moltiplicare il divisore per questo secondo termine e sottrarre dal dividendo il prodotto (come fatto in precedenza).*
6. *Si procede in questo modo fino ad ottenere come resto t oppure un polinomio di grado inferiore al divisore.*

Es.: dividere i seguenti polinomi fra loro

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 & x^2 + 2x + 1 \\
 -x^5 - 2x^4 - x^3 & x^3 - 3x^2 + x + 3 \\
 \hline
 -3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 2 & \\
 + 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 & \\
 \hline
 x^3 + 5x^2 + 3x - 2 & \\
 -x^3 - 2x^2 - x & \\
 \hline
 + 3x^2 + 2x - 2 & \\
 -3x^2 - 6x - 3 & \\
 \hline
 = -4x - 5 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= x^3 - 3x^2 + x + 3 \\
 R(x) &= -4x - 5
 \end{aligned}$$

Osservazione: quando il polinomio dividendo è incompleto conviene lasciare gli spazi vuoti in corrispondenza dei termini mancanti.

Es.: $(x^5 - 3x^2 + 4) : (x^2 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - & - & -3x^2 - & + 4 & x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 & & & &
 \end{array}$$

6. PRODOTTI NOTEVOLI

Sono detti tali alcuni particolari prodotti.

1. Il prodotto di una somma di monomi per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati.

$$\text{Es.: } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

2. Il quadrato di un binomio è uguale alla somma algebrica dei quadrati dei due prodotti e del doppio prodotto di questi monomi.

$$\text{Es.: } (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2bis. $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2ter. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

3. Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma algebrica dei quadrati dei suoi termini e dei doppi prodotti di ogni termine per i successivi.

$$\begin{aligned}
 \text{Es.: } (a + b + c + d)^2 &= \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd
 \end{aligned}$$

4. Il cubo di un binomio è uguale alla somma algebrica dei cubi dei suoi termini e dei tripli prodotti dei quadrati di ognuno di essi per l'altro.

$$\begin{aligned}
 \text{Es.: } (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) = \\
 &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a - b)^3 &= a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2
 \end{aligned}$$

5. Il cubo di un trinomio è la somma algebrica dei cubi dei tre monomi aumentata dei tripli prodotti del quadrato di ognuno di essi per ciascuno dei rimanenti e del sestuplo del prodotto dei 3 monomi.

$$\text{Es.: } (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

6. Potenza di un binomio e triangolo di Tartaglia

Si voglia calcolare $(a + b)^4$

$$\begin{aligned}
 \text{si ha } (a + b)^4 &= (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b) = \\
 &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = \\
 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
 \end{aligned}$$

Si potrebbe allo stesso modo calcolare anche $(a + b)^5$, $(a + b)^6$ ecc...

Riepilogando si è trovato:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Si osserva che gli sviluppi sono polinomi omogenei, di grado uguale all'esponente e completi. Ordinando tali sviluppi i coefficienti sono i numeri del seguente prospetto detto *triangolo di Tartaglia* (Nicolò Fontana, detto Tartaglia, 1500 - 1559). Per formare tale triangolo basta osservare che ogni riga inizia e termina con 1 e ognuno degli altri numeri è dato dalla somma dei due sovrastanti.

Esponenti	Coefficienti													
0									1					
1								1	1					
2								1	2	1				
3								1	3	3	1			
4								1	4	6	4	1		
5								1	5	10	10	5	1	
6								1	6	15	20	15	6	1

Es.: calcolare $(3x + 2y)^4$ in questo caso $3x = a$ $2y = b$ Perciò $(3x + 2y)^4 =$
 $= (3x)^4 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot (2y) + 6 \cdot (3x)^2 \cdot (2y)^2 + 4 \cdot (3x) \cdot (2y)^3 + (2y)^4 =$
 $= 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4.$

Regola: Lo sviluppo di $(a + b)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b , i cui coefficienti estremi sono uguali a 1, il secondo coefficiente è n , ogni altro coefficiente è uguale a quello del termine precedente moltiplicato per l'esponente di a in tale termine, diviso per b aumentato di 1.

Ricordiamo che $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ poiché questo è un errore che viene commesso spesso.

Data l'espressione $(a + b)^7$ qual è il coefficiente del termine dello sviluppo la cui parte letterale è a^2b^5 ?

- a) 35 b) 15
 c) 28 d) 21

Risposta **d)**: si applica lo sviluppo del triangolo di Tartaglia.

7. PRINCIPIO D'IDENTITÀ DI DUE POLINOMI

Definizione: Due polinomi sono identici quando tutti i monomi di uno di essi sono identici ai rispettivi monomi dell'altro.

Ad esempio i seguenti monomi sono identici:

$$3a^2b - 5a + 3b^2 \quad \text{e} \quad 3b^2 + 3a^2b - 5a$$

Da quanto detto scaturisce chiaramente che: un polinomio non può essere identico che a se stesso.

Così come per i monomi, bisogna fare attenzione a non confondere il concetto di polinomi *identici* con quello di polinomi *uguali*.

Infatti due polinomi possono essere uguali anche senza essere identici e ciò sarà possibile quando esisterà almeno un sistema di numeri che, sostituiti alle lettere che figurano nei polinomi, diano luogo ad una uguaglianza (o identità) numerica.

Ad esempio se consideriamo i seguenti polinomi:

$$2a^2 - 3a - 11$$

$$2a + a^2 + 11$$

essi non sono identici, tuttavia per $a = 7$ abbiamo da entrambi 66.

Infine diamo la definizione di espressioni algebriche identicamente uguali.

Definizione: Due espressioni algebriche si dicono identicamente uguali quando, eseguite tutte le operazioni in esse indicate e ridotti i termini simili, si ottengono due polinomi identici.

Es.: $(a + b)^2 - 2ab$ e $(a - b)^2 + 2ab$

sono identicamente uguali in quanto abbiamo:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

8. TEOREMA E REGOLA DI RUFFINI

DIVISIBILITÀ DI UN POLINOMIO INTERO PER IL BINOMIO $x - k$

Siano $A(x)$ un polinomio intero di grado n nella variabile x , e $x - k$ un binomio lineare. Esiste un polinomio $Q(x)$ e un polinomio R , tali che si abbia

$$A(x) = (x - k) \cdot Q(x) + R$$

essendo $Q(x)$ di grado $n - 1$, ed $R(x)$ di grado inferiore a quello di $x - k$, perciò di grado zero. Ne consegue che R o è nullo o non contiene la x .

Sostituendo alla x il valore k , per il principio d'identità dei polinomi, dev'essere:

$$A(k) = (k - k) \cdot Q(k) + R = 0 \cdot Q(k) + R$$

cioè $A(k) = R$

da cui si deduce che il resto della divisione di un polinomio intero in x , $A(x)$ per il binomio $x - k$, è il valore che assume il polinomio stesso quando alla lettera x si sostituisce il numero k .

Se il polinomio $A(x)$ è divisibile per $(x - k)$ il resto della loro divisione dev'essere uguale a zero.

— Condizione necessaria e sufficienti affinché un polinomio intero $A(x)$ risulti divisibile per il binomio $x - k$, è che sia k uno zero del polinomio, cioè si abbia:

$$A(k) = 0$$

Es.: $A(x) = x^3 + 2x^2 - 16x + 3$ è divisibile per $x - 3$.

$$\text{Infatti } A(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 3 = 27 + 18 - 48 + 3 = 0$$

REGOLA DI RUFFINI

Per trovare i coefficienti del quoziente ed il resto della divisione del polinomio $A(x)$ (intero di grado n ed ordinato) per il binomio $B(x) = x - k$ ci avvaliamo della seguente regola detta di Ruffini.

- Il primo coefficiente del polinomio quoziente è uguale al primo coefficiente del polinomio dividendo.
- Il secondo coefficiente si ottiene addizionando al secondo coefficiente del polinomio dividendo, il prodotto della moltiplicazione del primo coefficiente del polinomio quoziente per k .
- Ogni altro coefficiente del polinomio quoziente si ottiene addizionando al coefficiente del polinomio dividendo di ugual posto, il prodotto del coefficiente che lo precede per k .
- Il resto della divisione è la somma dell'ultimo coefficiente del polinomio dividendo con il prodotto dell'ultimo coefficiente del polinomio quoziente, per k .

Es.: Calcolare, mediante la Regola di Ruffini, il quoziente ed il resto della divisione di

$$A(x) = 5x^3 - 7x^2 - 6x - 1$$

$$\begin{array}{c} \text{per} \\ B(x) = x - 2 \end{array}$$

Coefficiente di $A(x)$

Prodotti per

Coefficiente di $Q(x)$

	5	-7	-6	-1
2		10	6	0
	5	+3	0	-1

$$Q(x) = 5x^2 + 3x$$

$$R = -1$$

9. DIVISIBILITÀ DEI BINOMI NOTEVOLI

La differenza di due potenze di egual grado è sempre divisibile per la differenza delle basi:

$$\begin{aligned}x^2 - a^2 &= (x - a) \cdot (x + a) \\x^3 - a^3 &= (x - a) \cdot (x^2 + ax + a^2)\end{aligned}$$

La differenza di due potenze di egual grado è divisibile per la somma delle basi solo quando l'esponente è pari.

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

La somma di due potenze di egual grado non è mai divisibile per la differenza delle basi.

La somma di due potenze di egual grado è divisibile per la somma delle basi solo quando l'esponente è dispari.

10. SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI

Si dice che un dato polinomio intero è stato scomposto in fattori, quando si siano potute determinare altre espressioni di grado minore il cui prodotto sia uguale al polinomio dato.

RACCOLGIMENTO A FATTOR COMUNE

Se i termini di un polinomio intero sono divisibili per uno stesso monomio, si può raccogliere a fattor comune tale monomio. Il polinomio sarà allora scomposto nel prodotto di tale monomio, e dal quoziente che si ottiene dividendo il polinomio per questo monomio.

$$\begin{aligned}\text{Es.: } 7a^2x^2 - 3a^3x^2 - \frac{1}{2}a^2x &= a^2x \cdot (7x - 3ax - \frac{1}{2}) \\7a \cdot (b - c) + 3b \cdot (b - c) + 5 \cdot (b - c) &= (b - c) \cdot (7a + 3b + 5)\end{aligned}$$

In questi casi si è proceduto a raccoglimento a fattor comune totale, ma ci sono altri casi in cui si procede a raccoglimento a fattor comune parziale:

$$\text{Es.: } ay + ax - 2bx - 2by = a \cdot (y + x) - 2b \cdot (x + y)$$

DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

La differenza di due quadrati è uguale al prodotto della somma delle loro basi, per la loro differenza.

$$\begin{aligned}\text{Es.: } 4x^2 - y^2 &= (2x + y) \cdot (2x - y) \\ \frac{5}{9}a^3b^2 - 5a &= 5a \cdot \left(\frac{1}{9}a^2b^2 - 1\right) = 5a \cdot \left(\frac{1}{3}ab + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}ab - 1\right)\end{aligned}$$

TRINOMIO, QUADRATO DI UN BINOMIO

Se due dei tre monomi di un trinomio sono quadrati e il rimanente è il doppio prodotto delle basi di tali quadrati, il trinomio è il quadrato di un binomio.

$$\begin{aligned}\text{Es.: } a^2 + 6ab + 9b^2 &= (a + 3b)^2 \\ 36a^4 - 24a^3 + 4a^2 &= 4a \cdot (9a^2 - 6a + 1) = 4a \cdot (3a - 1)^2\end{aligned}$$

QUADRINOMIO - CUBO DI UN BINOMIO

Se in un quadrinomio, due dei suoi termini sono cubi di monomi e gli altri due sono ognuno il triplo prodotto del quadrato dell'uno per l'altro, il quadrinomio è il cubo di un binomio.

$$\begin{aligned}\text{Es.: } 8a^3 + 6a^2b + \frac{3}{2}ab^2 + \frac{1}{8}b^3 &= \left(2a + \frac{1}{2}b\right)^3 \\ a^6 - 12a^4b^2 + 48a^2b^4 - 64b^6 &= (a^2 - 4b^2)^3 = \\ &= [(a + 2b) \cdot (a - 2b)]^3 = (a + 2b)^3 \cdot (a - 2b)^3\end{aligned}$$

QUADRATO DI UN POLINOMIO

Se in un polinomio alcuni termini sono quadrati di monomi e i rimanenti sono doppi prodotti di ognuno di questi per gli altri, il polinomio è il quadrato di un polinomio.

$$\begin{aligned} \text{Es.: } 9a^2 + b^2 + c^2 + 6ab + 6ac + 2bc &= (3a + b + c)^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 9 &= (a + b + c)^2 - 9 = \\ &= (a + b + c + 3) \cdot (a + b + c - 3) \end{aligned}$$

SOMMA E DIFFERENZA DI DUE CUBI

La somma di due cubi è uguale al prodotto della somma delle basi per il trinomio formato dal quadrato delle basi, meno il prodotto delle stesse.

$$\text{Es.: } (a^3 + b^3) = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

La differenza di due cubi è uguale al prodotto della differenza delle basi per il trinomio formato dal quadrato delle basi, più il prodotto delle stesse.

$$\text{Es.: } (a^3 - b^3) = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

TRINOMIO DI SECONDO GRADO

Consideriamo il trinomio di secondo grado

$$x^2 + ax + b \text{ (con } a, b \text{ due numeri relativi generici)}$$

se è possibile determinare due numeri relativi m e n tali che

$$\begin{aligned} m + n &= a \\ m \cdot n &= b \end{aligned}$$

il trinomio diventa

$$x^2 + (m + n) \cdot x + m \cdot n = x^2 + mx + nx + mn$$

con successivi raccoglimenti a fattor comune:

$$x \cdot (x + m) + n \cdot (x + m) = (x + m) \cdot (x + n)$$

quindi, infine

$$x^2 + ax + b = (x + m) \cdot (x + n)$$

$$\text{Es.: } x^2 + 7x + 12 \text{ essendo } \begin{cases} 7 = 3 + 4 \\ 12 = 3 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\text{si ha } x^2 + 7x + 12 = (x + 3) \cdot (x + 4)$$

11. M.C.D. E m.c.m. DI MONOMI E POLINOMI

— Se più monomi sono divisibili per uno stesso monomio, questo dicesi divisore comune dei monomi dati.

Il M.C.D. di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il M.C.D. dei coefficienti dei monomi dati, se essi sono tutti interi, e la cui parte letterale è il prodotto dei fattori letterali comuni a tutti i monomi, presi una sola volta e col minore degli esponenti con cui tali lettere compaiono in ciascuno dei monomi.

Es.: trovare il M.C.D. dei seguenti monomi:

$$36a^2b^3x^2y; \quad -15ab^4x^2; \quad 24a^6b^3y^2; \quad 54a^2b^2x^2$$

$$\text{si ha M.C.D.} = 3ab^2$$

— Se un monomio è divisibile per due o più monomi dati si dice che esso è multiplo dei monomi dati.

Il m.c.m. di due o più monomi è un monomio avente per coefficiente il m.c.m. dei coefficienti dei monomi dati e la parte letterale costituita dal prodotto dei fattori letterali comuni e non comuni ai mo-

nomi dati presi una sola volta e con il maggiore degli esponenti con cui tali lettere compaiono nei monomi dati.

Es.: trovare il **m.c.m.** tra i seguenti monomi:

$$-2a^3bx^2y;$$

$$6ab^3x;$$

$$5xy^3$$

si ha **m.c.m.** = $30a^3b^3x^2y^3$

— *Il M.C.D. di due o più polinomi, scomposti in fattori, è il prodotto dei fattori comuni, ciascuno preso con il minore esponente.*

Es.: trovare il M.C.D. tra i seguenti polinomi:

$$[(4a^2 - b^2); (4a^2 + 4ab + b^2); (6a^2 + 3ab)] = 2a + b$$

$$4a^2 - b^2 = (2a + b) \cdot (2a - b)$$

$$4a^2 + 4ab + b^2 = (2a + b)^2$$

$$6a^2 + 3ab = 3a \cdot (2a + b)$$

Il **M.C.D.** sarà $2a + b$

— *Il m.c.m. di due o più polinomi, scomposti in fattori è il prodotto dei fattori comuni e non comuni, ciascuno preso con il maggiore esponente.*

Es.: trovare il m.c.m. tra i seguenti polinomi:

$$[(x^2 - 9); (x^3 - 8); (5x^3 + 5x^2 - 30x)];$$

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

$$5x^3 + 5x^2 - 30x = 5x \cdot (x^2 + x - 6) = 5x \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$$

per cui il **m.c.m.** sarà: $5x \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$