CAPITOLO I
ARITMETICA

NUMERAZIONE ROMANA

Nella numerazione romana, basata sul principio additivo, due simboli giustapposti (vicini) rappresentano la somma dei numeri rappresentati da essi, cioè ad esempio:

II = 2 ossia 1 + 1
VI = 6 cioè 5 (V) + 1 (I)
CL = 150 cioè 100 (C) + 50 (L)

Il principio additivo vale anche nel caso di più di due numeri allineati come ad esempio:

VIII = 8 ovvero 5 (V) + 1 (I) + 1 (I) + 1 (I)
LXX = 70 cioè 50 (L) + 10 (X) + 10 (X)

Per non disperdersi in scritture troppo lunghe si può usare anche il metodo per differenza che sottrae il simbolo scritto per primo (inferiore) da quello scritto per secondo (superiore). Esempi:

IV	= 4;	5 (V) – 1 (I)
IX	= 9;	10 (X) – 1 (I)
XL	= 40;	50 (L) – 10 (X)
XLIX	= 49;	50 (L) – 10 (X) + 9 (IX)
XCIX	= 99;	100 (C) – 10 (X) + 9 (IX)

I simboli fondamentali della numerazione romana sono:
I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; C = 100; D = 500; M = 1.000.
Elenco di alcuni numeri romani:

I	= 1	XI	= 11	XXX	= 30	CL	= 150
II	= 2	XII	= 12	XL	= 40	CC	= 200
III	= 3	XIII	= 13	L	= 50	CCC	= 300
IV	= 4	XIV	= 14	LX	= 60	CD	= 400
V	= 5	XV	= 15	LXX	= 70	D	= 500
VI	= 6	XVI	= 16	LXXX	= 80	DC	= 600
VII	= 7	XVII	= 17	XC	= 90	DCC	= 700
VIII	= 8	XVIII	= 18	C	= 100	DCCC	= 800
IX	= 9	XIX	= 19	CX	= 110	CM	= 900
X	= 10	XX	= 20	CXL	= 140	M	= 1.000

Esempi svolti: 1.749 = MDCCXLIX; 2.532 = MMDXXXII; 725 = DCCXXV; 899 = DCCCXCIX.

Introduzione

L'*aritmetica* è l'arte dei numeri. Infatti, contare e numerare è l'operazione che si compie per stabilire quanti sono gli oggetti che costituiscono il gruppo; nell'attribuire a ogni oggetto dello stesso gruppo una unità o nel nominare tali unità una di seguito all'altra.

I numeri da 0 a 9 sono le cifre significative.

L'unità sola si dice semplice o fondamentale.

Il numero 10 è alla base della numerazione in quanto un numero di 10 unità è una nuova unità che si dice di ordine superiore.

Per questo la nostra numerazione è detta *decimale* o a *base decimale*.

Classificazione degli insiemi numerici

Numero naturale. L'insieme dei numeri naturali si indica con la lettera N, e comprende infiniti numeri interi positivi (1, 2, 3, ...). Sono utilizzati fin dall'antichità (la numerazione romana comprende solo numeri naturali). In esso godono della proprietà di chiusura le operazioni di addizione e moltiplicazione; cioè sommando o moltiplicando tra loro due numeri naturali si ottiene sempre come risultato un numero naturale. Questo potrebbe non accadere sottraendo o dividendo due numeri naturali: $4 - 7 = -3$ (non è un numero naturale), oppure $8 : 3 = 2{,}666$ (non è un numero naturale).

Numero intero (*o relativo*). Si indica con la lettera I oppure Z. È composto dai numeri naturali, dai loro opposti (– 1, – 2, ...) e dallo zero. A causa dell'importanza che rivestono nelle situazioni concrete, ai numeri interi è sempre stata dedicata molta attenzione da parte dei matematici. Su questo insieme c'è la chiusura anche della sottrazione, sottraendo tra loro due numeri interi otteniamo sempre un numero intero. Qualunque numero intero maggiore di 1 e divisibile solo per se stesso o per 1 è detto numero primo. Ogni numero intero ammette un'unica scomposizione in fattori primi, ossia un solo insieme di numeri primi, o di potenze di essi, il cui prodotto fornisca il numero dato.

Numero razionale. In matematica, classe di numeri esprimibili come rapporto tra due interi. Ogni numero razionale si può quindi indicare con m/n con m e n interi. Da questa divisione si può ottenere un numero intero, un numero decimale limitato, un numero decimale illimitato o periodico. Si indica con la lettera Q ed è composto da infiniti elementi.

Numero irrazionale. Classe di numeri che non possono essere espressi come il quoziente di due numeri interi; un familiare esempio di numero irrazionale è π. In forma decimale essi ammettono una serie infinita di cifre decimali, che non si riduce mai alla ripetizione periodica di uno stesso gruppo di numeri.

Numero reale. È un numero che appartiene o ai razionali o agli irrazionali.

Numero immaginario. Classe di numeri non appartenenti all'insieme dei numeri reali, e multipli dell'unità immaginaria (radice quadrata di – 1) . I numeri immaginari non hanno significato concreto nel mondo reale, tuttavia sono semplici da trattare nelle operazioni matematiche, e risultano fondamentali nella rappresentazione di vari fenomeni, in particolare nell'ambito delle scienze fisiche.

Numero complesso. Espressione della forma $a + bi$ dove a e b sono numeri reali e i rappresenta l'unità immaginaria, cioè la radice quadrata di – 1.

È opportuno ricordare le seguenti definizioni:

– *Valore assoluto* (o *modulo*) *di un numero relativo*: è il numero stesso, ma senza segno.

– *Numeri relativi concordi:* con lo stesso segno (es.: – 4 e – 8, oppure + 7 e + 11).
– *Numeri relativi discordi:* con segno diverso (es.: – 3 e + 5, oppure + 8 e – 4).
– *Numeri relativi opposti:* con valore assoluto uguale e segno diverso. La somma di due numeri opposti è 0 (es.: – 3, + 3).
– *Numeri relativi inversi (o reciproci):* il loro prodotto è = 1 (es.: 5 e 1/5, – 3/4 e – 4/3).
– *Numeri relativi antireciproci:* sono contemporaneamente inversi e discordi (es.: 2 e – 1/2).
– *Il prodotto di due numeri relativi concordi è positivo.*
– *Il prodotto di due numeri relativi discordi è negativo.*
– *Il prodotto di due numeri opposti è negativo.*
– *Se il prodotto di due numeri relativi è positivo*, i due numeri sono entrambi positivi o entrambi negativi.
– *Se il prodotto di due numeri relativi è negativo,* uno è negativo, l'altro è positivo.
– *Se il prodotto di due numeri relativi è nullo,* uno o entrambi sono nulli.
– *Se il prodotto di tre numeri è un numero negativo,* allora i tre numeri sono negativi.
– *Se il prodotto di quattro numeri è un numero positivo,* allora i fattori concordi sono in numero pari.
– *Se una divisione tra numeri relativi ha come quoziente + 1,* vuol dire che il dividendo è 0 e che il divisore è un numero qualunque.
– *Se la somma di due numeri relativi è nulla,* essi sono opposti.
– *Se la differenza di due numeri relativi è nulla,* essi sono uguali. (La differenza di due numeri relativi è il numero che si ottiene aggiungendo al primo l'opposto del secondo).

1. Numeri interi

1° gruppo

1° ord. unità	– da 1 a 9
2° ord. decine	– da 10 a 99
3° ord. centinaia	– da 100 a 999

2° gruppo

4° ord. unità di migliaia	– da 1.000 a 9.999
5° ord. decine di migliaia	– da 10.000 a 99.999
6° ord. centinaia di migliaia	– da 100.000 a 999.999

3° gruppo

7° ord. un. di milioni	– da 1.000.000 a 9.999.999
8° ord. dec. di milioni	– da 10.000.000 a 99.999.999
9° ord. cen. di milioni	– da 100.000.000 a 999.999.999

4° gruppo

10° ord. un. di miliardi o bilioni:	– da 1.000.000.000 a 9.999.999.999
11° ord. dec. di miliardi o bilioni:	– da 10.000.000.000 a 99.999.999.999
12° ord. cen. di miliardi o bilioni:	– da 100.000.000.000 a 999.999.999.999

5° gruppo

13° ord. un. di trilioni	– da 1.000.000.000.000 a 9.999.999.999.999
14° ord. dec. di trilioni	– da 10.000.000.000.000 a 99.999.999.999.999
15° ord. cen. di trilioni	– da 100.000.000.000.000 a 999.999.999.999.999

I numeri interi si contano da destra verso sinistra.

Esempi sugli ordini dei numeri

Es.: *Quante unità del 3° ordine ci sono nel numero 253.462?*

Le unità del 3° ordine sono le centinaia, quindi in questo caso il numero *4* rappresenta le unità del 3° ordine.

Es.: *10^3 è l'ordine di grandezza del numero ...*

In questo caso bisogna prima svolgere la potenza di 10^3 cioè $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$ e poi scegliere tra le opzioni quella che più si avvicina per «difetto» al numero dato, cioè, in questo caso, 1.000. Quindi se nell'esempio 10^3 le soluzioni possibili sono: a) 500 b) 190 c) 832 d) 1.020, bisogna scegliere l'alternativa c).

Es.: *10^{-1} è l'ordine di grandezza del numero ...*

Poiché 10 alla meno uno è 1/10 cioè 0,1 il numero da scegliere è quello che più si avvicina a 0,1 ... per difetto come nell'esempio precedente.

2. Numeri decimali

I numeri decimali vengono posti dopo la virgola e si enunciano nell'ordine:

– decimi	0,1
– centesimi	0,01
– millesimi	0,001
– decimillesimi	0,0001
– centimillesimi	0,00001
– milionesimi	0,000001
– decimilionesimi	0,0000001
– centimilionesimi	0,00000001
– bilionesimi o miliardesimi	0,000000001
– decimiliardesimi	0,0000000001
– centimiliardesimi	0,00000000001
– trilionesimi	0,000000000001 ecc.

Nota - I predetti numeri decimali si contano da sinistra verso destra.

3. Proprietà delle uguaglianze

Le scritture $4 + 3 = 7$; $2 + 3 = 5$; $6 + 3 = 9$ si dicono uguaglianze.

Il segno = si legge «è uguale»; 4 + 3 si dice primo membro dell'uguaglianza e 7 secondo membro. Le proprietà sono:

1. *riflessiva*: ogni numero è uguale a se stesso. *Es.*: $3 = 3$;
2. *simmetrica*: se un numero è uguale ad un altro, questo è uguale al primo.

Es.: $4 + 3 = 7$; 7 è pure uguale a $3 + 4$

3. *transitiva*: se un numero è uguale a un altro e questo è uguale a un terzo, anche il primo sarà uguale al terzo.

Es.: $3 + 4 = 7$; $2 + 5 = 7$; anche $3 + 4 = 2 + 5$.

4. Disuguaglianze

Per indicare se un numero è maggiore o minore di un altro si adoperano i seguenti simboli: > e <

$9 > 6$ significa che 9 è maggiore di 6

$6 < 9$ significa che 6 è minore di 9

Nota - Il vertice del «triangolo» va sempre posto in direzione del numero inferiore.

5. Integrazioni sui numeri naturali

Se l'esercizio parla di numeri che «sono compresi» vuol dire che non devo prendere in considerazione i numeri estremi. *Es.*: $1 < n < 4$.

I numeri compresi tra 1 e 4 sono solo 2 e 3; se invece sono «compresi e uguali» prendo in considerazione anche l'estremo o gli estremi con l'uguale. *Es.*: $1 \leq n < 4$.

Oltre al 2 e 3 anche il numero 1 va considerato, perché c'è il simbolo ≤ (minore od uguale), mentre il 4 non va considerato poiché non c'è il simbolo uguale.

Inoltre va ricordato che: il più piccolo numero naturale di una cifra è 0 e il più grande è 9; il più piccolo di due cifre è 10; il più grande è 99 ecc.

Se l'esercizio mi chiede di calcolare la somma dei primi 20 numeri (il 20 è solo un esempio) il ragionamento che debbo seguire è il seguente:
– se *n* è *pari* (come nel caso dell'esempio 20) si moltiplica il valore per la sua metà e si aggiunge la metà. Quindi $20 \cdot 10 + 10 = 200 + 10 = 210$.
– se *n* è *dispari* (es.: 27) si moltiplica la metà di quel valore approssimato per eccesso per il valore stesso.

Nell'esempio $\frac{27}{2} = 13{,}5$ quindi $14 \cdot 27 = 378$.

Le quattro operazioni

1. Addizione e relative proprietà

Addizionare un numero a un altro significa contare di seguito al primo le unità del secondo. Le proprietà dell'addizione sono:

1. *commutativa*: invertendo l'ordine degli addendi il totale non cambia.
$$5 + 2 = 7; \qquad 2 + 5 = 7;$$

2. *associativa*: una somma di più addendi non cambia se ad alcuni di essi si sostituisce la loro somma.
$$2 + 3 + 4 + 5 = 14; \qquad 2 + 7 + 5 = 14;$$

3. *dissociativa*: una somma di due o più addendi non cambia se a un addendo si sostituiscono altri la cui somma sia uguale all'addendo considerato.
$$2 + 6 + 7 = 15; \qquad 2 + 6 + 3 + 4 = 15.$$

I numeri dell'addizione si dicono «*addendi*» ed il risultato si dice «*somma* o *totale*».

3 + 5 (addendi) = 8 (somma o totale). Il segno è + (più).

2. Sottrazione e relativa proprietà

Sottrarre un numero da un altro significa trovare un terzo numero che sommato al secondo dia il risultato del primo.
$$9 - 7 = 2; \qquad 2 + 7 = 9$$

9 si dice minuendo.
7 si dice diminutore o sottraendo.
2 si dice differenza.
Il segno è – (meno).
I numeri 9 e 7 considerati assieme si dicono termini della sottrazione.

La sottrazione ha una sola proprietà:
– *invariantiva*: aggiungendo o togliendo ai due termini di una sottrazione uno stesso numero la differenza non cambia.

$$9 - 7 = 2; \qquad (9 + 3) - (7 + 3) = 12 - 10 = 2; \qquad (9 - 4) - (7 - 4) = 5 - 3 = 2.$$

3. Moltiplicazione e relative proprietà

Moltiplicare un numero per un altro (maggiore di uno) significa fare la somma di tanti addendi uguali al primo quante sono le unità contenute nel secondo numero.

La moltiplicazione non è altro che una addizione abbreviata.

$$9 \cdot 3 = 27; \qquad 9 + 9 + 9 = 27.$$

I numeri 9 e 3 si dicono rispettivamente *moltiplicando* e *moltiplicatore*; se si considerano assieme assumono la denominazione di *fattori*. Il numero 27 di cui all'esempio suindicato, si dice *prodotto*. Il segno · si dice moltiplicando o semplicemente *per*. Le proprietà sono:

1. *commutativa*: invertendo l'ordine dei fattori il prodotto non cambia.

$$6 \cdot 4 = 24; \qquad 4 \cdot 6 = 24;$$

2. *associativa*: un prodotto di più fattori non muta se ad alcuni di essi si sostituisce il loro prodotto.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24; \qquad 2 \cdot 12 = 24;$$

3. *dissociativa*: un prodotto di più fattori non cambia se a uno di essi se ne sostituiscono altri il cui prodotto sia uguale al fattore considerato.

$$3 \cdot 8 \cdot 5 = 120; \qquad 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

4. *distributiva rispetto all'addizione*: il prodotto di una somma per un numero si può eseguire moltiplicando ciascun addendo per quel numero e addizionando i prodotti parziali ottenuti;

$$(2 + 3 + 4) \cdot 5 = (9 \cdot 5) = 45$$
$$(2 \cdot 5) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 5) = (10 + 15 + 20) = 45;$$

5. *il prodotto di una differenza* per un numero si può eseguire moltiplicando ciascun termine della differenza per quel numero e sottraendo i prodotti parziali ottenuti.

$$(8 - 2) \cdot 4 = (6 \cdot 4) = 24$$
$$(8 \cdot 4) - (2 \cdot 4) = (32 - 8) = 24$$

Nota - Se tra i fattori vi è *zero*, il prodotto è *zero*. *Es.*: $2 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 5 = 0$.

4. Divisione e relative proprietà

Dividere un numero per un altro vuol dire trovare un terzo numero che, moltiplicato per il secondo, e aggiungendo l'eventuale resto, dia per risultato il primo.

$$16 : 2 = 8; \qquad 8 \cdot 2 = 16.$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

17 si dice dividendo
3 si dice divisore
5 si dice quoziente
2 si dice resto.
se il resto è zero il risultato si dice quoto.
Prova: $5 \cdot 3 = 15$; $15 + 2 = 17$.

Le proprietà della divisione sono:

1. *invariantiva*: moltiplicando il dividendo e il divisore per uno stesso numero il quoziente non cambia e il resto, se c'è, risulta moltiplicato per quel numero;

   Es.: 27: 6 è uguale a 4 con il resto di 3.

   Se moltiplico $27 \cdot 3$, $6 \cdot 3$ e $3 \cdot 3$ ottengo i seguenti numeri: 81, 18, e 9.
   Dividendo 81 per 18, trovo «4» come quoziente e «9» come resto, cioè $3 \cdot 3$;

2. *distributiva rispetto all'addizione*: per dividere una somma indicata di due o più numeri per un numero dato, si possono dividere – se ciò risulta possibile – tutti gli addendi per quel numero e sommare i quozienti parziali ottenuti.

$$(40 + 25 + 10) = 75; \quad 75 : 5 = 15$$

$$(40 : 5) + (25 : 5) + (10 : 5) = (8 + 5 + 2) = 15;$$

3. *distributiva rispetto alla sottrazione*: per dividere una differenza indicata per un numero dato, si possono dividere - se ciò risulta possibile - diminuendo e sottraendo per quel numero e sottrarre quindi i quozienti parziali ottenuti.

$$(18 - 6) : 3 = 4 \text{ quoziente.}$$

$$(18 : 3) - (6 : 3) = 6 - 2 = 4.$$

Sistema metrico decimale

Per misurare una qualsiasi grandezza sono indispensabili delle unità di misura quali il metro lineare, il metro quadrato, il grammo e il litro che sono dette misure principali.

A queste, per maggiore precisione e più facilità di calcolo, si aggiungono misure secondarie, maggiori o minori delle misure principali.

Tutte queste grandezze costituiscono il sistema metrico decimale.

1. Misure di lunghezza

L'unità fondamentale è il metro che è la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre.

Sono *multipli* del metro:

Mm	– miriametro	= 10.000 metri
Km	– chilometro	= 1.000 metri
hm	– ettometro	= 100 metri
dam	– decametro	= 10 metri
m.	*– metro*	*= 1 metro*

Sono *sottomultipli* del metro:

dm	– decimetro	= 0,1 metri
cm	– centimetro	= 0,01 metri
mm	– millimetro	= 0,001 metri

Le predette unità di lunghezza procedono di 10 in 10.

Quando si passa a una misura più grande si deve dividere per 10 per ogni ordine; quando si passa ad una misura più piccola occorre moltiplicare per 10 per ogni ordine.

Es.: m 2,8 = hm 0,028 (si sale di due ordini e si sposta la virgola verso sinistra di due posti), oppure si divide per 100 se il numero è intero.

Es.: Km 44,16 = dam 4.416 (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di due posti), oppure si aggiungono due zeri se il numero è intero.

Anche le misure di capacità e di peso procedono di 10 in 10 per ogni ordine.

2. Misure di capacità

Sono *multipli* del litro:

hl	– ettolitro	= 100	litri
dal	– decalitro	= 10	litri
l.	*– litro*	*= 1*	*litro*

Sono *sottomultipli* del litro:

dl	– decilitro	= 0,1	litro
cl	– centilitro	= 0,01	litro
ml	– millilitro	= 0,001	litro

dl 428,29 = dal 4,2829; hl 0,438 = cl 4.380

3. Misure di peso

Sono *multipli* del grammo:

t	– tonnellata	= 1.000.000	grammi
q	– quintale	= 100.000	grammi
Mg	– miriagrammo	= 10.000	grammi
Kg	– chilogrammo	= 1.000	grammi
hg	– ettogrammo	= 100	grammi
dag	– decagrammo	= 10	grammi
g	*– grammo*	*= 1*	*grammo*

Sono *sottomultipli* del grammo:

dg	– decigrammo	= 0,1	grammi
cg	– centigrammo	= 0,01	grammi
mg	– milligrammo	= 0,001	grammi

q 0,04 = dag 400; cg 230,13 = Kg 0,0023013.

Nota - In pratica si assume come unità di base di chilogrammo.

ALTRI SISTEMI DI MISURE

Per le misure di superficie (aree) si usano gli stessi simboli esaminati per le misure di lunghezza; va però tenuto presente che procedono di 100 in 100 per ogni ordine. Si parla pertanto di misure al quadrato.

Es.: dm^2 8,28 = mm^2 82.800 (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di quattro posti).

Es.: m^2 16,392 = dam^2 0,16392 (si sale di un ordine e si sposta la virgola verso sinistra di due posti).

Per le misure terriere si usano le seguenti misure agrarie che procedono di 100 in 100 per ogni ordine:

ha = ettaro = 10.000 metri quadrati = hm^2

a = ara = 100 metri quadrati = dam^2

ca = centiara = 1 metro quadrato = m^2

Quale unità di misura fondamentale si usa l'*ara*.

Anche per le misure di volume si usano gli stessi simboli delle misure di lunghezza; essi procedono però di 1.000 in 1.000 per ogni ordine. Si parla pertanto di misure cubiche.

Es.: m^3 0,04 = cm^3 40.000 (si scende di due ordini e si sposta la virgola verso destra di sei posti);

Es.: cm^3 96008,2 = m^3 0,0960082 (si sale di due ordini e si sposta la virgola verso sinistra di sei posti).

Per la misurazione della paglia, legna da ardere ecc., si adopera, in alcune località, lo *stero* che ha quale multiplo il *decastero* e come sottomultiplo il *decistero*.

Procedono di 10 in 10 per ogni ordine.

das = decastero = 10 metri cubi

s = stero = 1 metro cubo

ds = decistero = 0,1 metro cubo

Es.: das 0,8 = ds 80

EQUIVALENZE

Considerato che un litro di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi centigradi corrisponde a un decimetro cubo e a un chilogrammo, possiamo senz'altro eseguire riduzioni da litri a kg a dm^3 e ai multipli e sottomultipli dell'uno e dell'altro.

Si riportano i seguenti specchietti indicativi, sempre riferiti all'acqua con le caratteristiche su esposte.

Misure di capacità		Misure di estensione		Misure di peso
m^3 1	=	t 1	=	l 1.000
dm^3 1	=	kg 1	=	l 1
cm^3 1	=	g 1	=	ml 1
l 1	=	dm^3 1	=	kg 1
dal 1	=	dm^3 10	=	kg 10
hl 1	=	dm^3 100	=	kg 100
dl 1	=	cm^3 100	=	g 100
cl 1	=	cm^3 10	=	g 10
ml 1	=	cm^3 1	=	g 1

Es.: m^3 0,69 = hg ..... = hl .....

Cerchiamo le misure fondamentali (l, kg, dm^3); si ha che m^3 0,69 = dm^3 690 che sono anche il valore in kg e litri.

Ci è quindi facile fare il passaggio da kg 690 a hg 6.900 e da l 690 a hl 6,90.

CAPITOLO II

POTENZE

Dicesi potenza di un numero il prodotto di più fattori uguali a quel numero.
Es.: $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$; il numero 4 si dice base e il numero 2 esponente.
Il valore di una potenza si calcola moltiplicando per se stessa la base, tante volte quante sono le unità dell'esponente.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

La prima potenza di un numero è il *numero stesso*.

$$5^1 = 5.$$

La seconda potenza di un numero dicesi *quadrato del numero stesso*.
La terza potenza dicesi cubo e le potenze successive si dicono *quarta, quinta, sesta, settima* ecc.

1. Operazioni sulle potenze

L'addizione e la sottrazione di due potenze si eseguono sempre calcolando il valore di ogni potenza ed eseguendo quindi l'addizione o la sottrazione richiesta:

$$4^2 + 3^3 = 16 + 27 = 43; \qquad 5^2 - 2^3 = 25 - 8 = 17.$$

2. Proprietà sulle potenze

1. *il prodotto* di due o più potenze aventi la medesima base è uguale a un'altra potenza con la stessa base e per esponente la somma degli esponenti:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243.$$

2. *il quoziente* di due potenze aventi la medesima base è uguale a un'altra potenza con la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti:

$$5^3 : 5^2 = 5^1 = 5.$$

3. *la potenza di una potenza* è un'altra potenza con la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti:

$$(3^2)^3 = 3^6 = 729.$$

4. *per elevare a potenza un prodotto* di più fattori basta elevare a potenza i singoli fattori:

$$(5 \cdot 7 \cdot 3)^2 = (5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2) = 11.025.$$

5. *per elevare a potenza un quoziente* basta elevare a quella potenza il dividendo e il divisore:

$$(12 : 3)^2 = 12^2 : 3^2 = 144 : 9 = 16.$$

Nota - Se l'esponente è 0 il valore è 1. Es. $4^0 = 1$ (per convenzione). Infatti se si dividono due potenze di uguale base e di uguale esponente, il risultato è una potenza con la stessa base e con esponente zero.

Es.: $5^4 : 5^4 = 5^0$; ma si ha altresì $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 1$ da cui si rileva che $5^0 = 1$.

$$a^m - a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{n-n}$$
$$(a^m) = a^{m \cdot n}$$
$$a^o = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Multipli di un numero

Se si esegue il prodotto $4 \cdot 5$, il risultato ottenuto (20) si dice multiplo di 5 secondo il numero 4 e poiché $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$, il numero 20 si dice pure multiplo di 4 secondo il numero 5.

Ne consegue che il prodotto di due fattori è multiplo di ciascuno di essi secondo l'altro. È bene ricordare che:

1. lo *zero* è multiplo di qualunque numero, perché il prodotto di qualsiasi numero per *zero = zero*;
2. qualunque numero è multiplo di se stesso secondo il numero *uno* ($7 \cdot 1 = 7$);
3. il massimo multiplo di un numero non esiste, essendo i numeri infiniti;
4. i numeri multipli di due si dicono numeri *pari*; tutti gli altri si dicono *dispari*;
5. due numeri multipli rispettivamente di altri due numeri, secondo uno stesso numero, si dicono *equimultipli*.

Es.: 30 e 35 sono multipli rispettivamente di 6 e 7 secondo il numero 5; si dice che 30 e 35 sono equimultipli di 6 e 7.

Nota - Se consideriamo il numero 35 rispetto al 7 diremo che il numero 35 è multiplo di 7 ed il numero 7 è chiamato *sottomultiplo* o *divisore del maggiore*.

Criteri o caratteri di divisibilità

Vi sono alcune regole per accertare velocemente, senza eseguire la divisione, se un numero è divisibile per un altro.

Tali regole prendono il nome di criteri di divisibilità, di cui i principali sono i seguenti:

1. un numero è *divisibile per 2* quando termina con zero o con cifra pari;
2. un numero è *divisibile per 3* quando la somma delle sue cifre è divisibile per 3. *Es.*: 2361 è divisibile per 3 perché $2 + 3 + 6 + 1 = 12$ e 12 è divisibile per 3;
3. un numero è *divisibile esattamente per 4 o per 25* soltanto quando le ultime due cifre formano un numero divisibile per 4 o per 25;
4. un numero è *divisibile per 5* quando termina con 5 o con zero;
5. un numero è *divisibile per 9* quando la somma delle sue cifre è divisibile per 9;
6. un numero è *divisibile per 11* quando la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari è zero oppure un numero divisibile per 11. *Es.*: 105.149 è divisibile per 11 perché $(9 + 1 + 0) - (4 + 5 + 1) = 0$.

Prova del nove delle quattro operazioni

La conoscenza del carattere di divisibilità per 9 consente di effettuare un'altra prova per accertare l'esattezza di ciascuna delle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica; è la cosiddetta prova del 9. La sua validità però non è assoluta dato che, se si commette un errore multiplo di 9, la prova risulta esatta, ma l'operazione è sbagliata.

Es.: Se il risultato di una divisione è 36 o 63 la prova del 9 viene rispettata, ma non è esatto il valore assoluto. Essa viene eseguita nel modo seguente:

1. Per l'addizione

Si trovano prima i resti per 9 degli addendi. Se la somma di questi resti e la somma delle cifre del totale divisi per 9 danno resti uguali, l'addizione è esatta.

Es.:	33 +	prova	6 +
	24 +		6 +
	16 =		7 =
	73 (= 10 = 1)		19 = 1

(infatti il nr. 9 non si conta e quindi rimane 1). Pertanto l'operazione è esatta.

2. Per la sottrazione

Ricordiamo che diminutore + differenza = diminuendo. Perciò considerato il diminutore e la differenza come addendi e il diminuendo come la somma si ha la seguente regola. Si trovano i resti della divisione per 9 del diminutore e della differenza e si sommano. Questa somma e il diminuendo, se l'operazione e la prova sono state fatte bene, divise per 9 danno lo stesso resto.

diminuendo	7.458		
diminutore	3.274	= 7	(resto diminutore: 9)
differenza	4.184	= 8	(resto differenza: 9)
		15	somma dei resti

Verifichiamo che: 7.458 : 9 dà resto 6; 15 : 9 dà resto 6.

3. Per la moltiplicazione

Si trovano i resti della divisione per 9 del moltiplicando e del moltiplicatore e si calcola il prodotto. Questo prodotto e il prodotto dei fattori dati, divisi per 9, se operazione e prodotti sono stati eseguiti bene, danno resti uguali.

	1.237 x	4 x	
fattori	425 =	2 =	resti dei fattori divisi per 9
prodotto	525.725	8	prodotto resti fattori.

Il resto del prodotto dei fattori diviso per 9 è 8;
il resto del prodotto dei resti diviso per 9 è 8.

4. Per la divisione

Si trovano i resti delle divisioni per 9 del divisore e del quoziente, si moltiplicano tra loro e si aggiunge al prodotto il resto ottenuto dalla divisione per 9 del resto. La somma avuta e il dividendo, divisi per 9, devono dare resti uguali, se operazione e prova sono state eseguite bene.

dividendo		divisore
34.216	:	1.464
resto 544		quoziente 23

Resti della divisione per 9:

dividendo	34.216 = 7	quoziente	23 = 5
divisore	1.464 = 6	resto	544 = 4

$6 \cdot 5 = 30 +$
$\quad\quad 4 =$ (resto della rimanenza)
$\overline{\quad\quad 34}$

notiamo che 34.216 : 9 dà resto 7
34 : 9 dà resto 7

Scomposizione di un numero in fattori primi

Un numero si scompone in fattori primi per trovare quei numeri primi il cui prodotto è uguale al numero dato.

Per fare ciò si applicano i criteri di divisibilità. Si divide il numero dato per il suo più piccolo divisore primo provando successivamente se esso è divisibile per 2, 3, 5, 7 ecc.

Massimo comune divisore

Un numero che divide esattamente più numeri dati si dice che è un loro divisore comune.

Es.: il numero 4 è divisore comune di 16, 28, 36 perché tutti i numeri sono divisibili per 4.

Quando due o più numeri non hanno divisori comuni oltre l'unità si dicono *primi tra loro*.

Il massimo comune divisore di due o più numeri è perciò il maggiore dei loro divisori comuni.

Dati due numeri, se il primo è divisibile per il secondo, si dirà senz'altro che quest'ultimo è il massimo comune divisore dei due numeri.

Es.: Fra 35 e 7 il massimo comune divisore è 7.

Il metodo delle divisioni successive o di *Euclide* consente di trovare il massimo comune divisore (M.C.D.) dividendo il maggiore per il minore; se il resto è zero il M.C.D. è dato dal numero minore. Se il resto è diverso da zero si divide il primo divisore per questo resto; se il nuovo resto è zero il M.C.D. è il nuovo resto. Se invece si trova ancora un resto si proseguirà come già indicato fino a trovare per resto zero. L'ultimo divisore è il M.C.D. cercato.

Minimo comune multiplo

Il minimo comune multiplo fra due o più numeri è il minore dei loro multipli comuni.

Se il numero è divisibile soltanto per l'unità e per se stesso si dirà primo.

Per accertare questo è necessario conoscere la tavola dei numeri primi, per la cui costruzione si applica la regola detta «IL CRIVELLO DI ERATOSTENE». Essa si costituisce nel modo seguente, per determinare i numeri primi fino a 100.

Si scrivono a partire da 2 tutti i numeri, esclusi i multipli di 2 perché non sono primi. Si escludono tutti i multipli di 3 che è primo: poi si eliminano tutti i multipli di 5 non ancora considerati; successivamente i multipli di 7. I numeri rimanenti sono quelli primi fino a 100.

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo mediante la scomposizione in fattori primi

Conoscendo la scomposizione di un numero in fattori primi risulta facile calcolare il M.C.D. e il m.c.m. di più numeri.

Es.: di scomposizione in fattori primi:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

... da cui 150 è uguale a $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Il M.C.D. di due o più numeri è dato dal prodotto dei fattori primi *comuni* presi una sola volta col *minore esponente*.

Se vogliamo trovare il M.C.D. tra i seguenti numeri:

75 – 350 – 1.250 – 8.000
$75 = 3 \cdot 5^2$;
$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$;
$1.250 = 2 \cdot 5^4$;
$8.000 = 2^6 \cdot 5^3$.

Si rileva facilmente che il solo fattore comune ai quattro numeri è 5 e il suo minimo esponente è 2. Perciò il M.C.D. dei quattro numeri suddetti è $5^2 = 25$.

Il m.c.m. di due o più numeri è dato dal prodotto dei fattori primi *comuni e non comuni* presi una sola volta col *maggiore esponente*.

Infatti, nell'esempio precedente, il minimo comune multiplo risulta dato dai seguenti numeri:

$$2^6 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7 = 840.000.$$

PARENTESI ED ESPRESSIONI ARITMETICHE

Le parentesi che si usano nelle espressioni sono le seguenti:
1. tonda o rotonda ( )
2. quadra [ ]
3. graffa { }

Col nome di espressione aritmetica o numerica si intende un insieme di più numeri collegati tra loro mediante i segni delle quattro operazioni.

Poiché per la risoluzione di un'espressione aritmetica si possono incontrare valori racchiusi in parentesi, si dovrà calcolare il valore dell'espressione nel modo seguente:

a) prima quanto contenuto nelle parentesi tonde, poi quello nelle quadre e quindi quello nelle graffe;
b) per il giusto procedimento è indispensabile che si facciano prima le moltiplicazioni e le divisioni e quindi le addizioni e le sottrazioni indipendentemente dalle parentesi;
c) se all'esterno delle parentesi ci sono potenze, occorre prima risolvere quanto è inserito tra le parentesi stesse, quindi effettuare l'elevazione a potenza.